

Raport științific

privind implementarea proiectului în perioada August – Decembrie 2022

PROIECT DE CERCETARE

Buna-definire, rezultate de existență și caracterizare a soluțiilor pentru anumite probleme variaționale

DOMENIUL 10. TEHNICI INOVATIVE DE MODELARE MATEMATICĂ A SISTEMELOR FIZICE
ȘI SOCIO-ECONOMICE

CONTRACT 44/14.04.2022

Director de proiect: SAVIN TREANȚĂ

Academia Oamenilor de Știință din România, 54 Splaiul Independenței, 050044
București, România

I. Abstract

Tema de cercetare, în care a fost înaintată propunerea de proiect, este unul dintre punctele importante și de actualitate ale comunității relevante de cercetare. Aceasta include metode de optimizare robustă și incertă, și teoria controlului optimal cu aplicații în inginerie, sisteme fizice și socio-economice. Distingem următoarele *obiective specifice*: (A) buna-definire, condiții de eficiență și rezultate de echivalență asociate cu noile clase de probleme variaționale; (B) introducerea unor probleme variaționale robuste modificate și criteriile de eficiență asociate de tip punct șă; (C) abordarea Lagrange-Hamilton-Jacobi și studiul soluțiilor robuste slabe ascuțite în problemele considerate; (D) eficacitatea și aplicațiile problemelor studiate.

II. Rezultate obținute

În cadrul acestui proiect, în anul 2022, în perioada 01.08.2022-05.12.2022, au fost obținute următoarele rezultate:

A. Articole/cărți publicate

- **S. Treanță**, *Recent Advances of Constrained Variational Problems Involving Second-Order Partial Derivatives - A Review*, Mathematics, Vol. 10, No. 15, 2599, 2022; DOI: 10.3390/math10152599; eISSN: 2227-7390.
- T. Saeed, M.B. Khan, **S. Treanță**, H.H. Alsulami, M.Sh. Alhodaly, *Interval Fejér type Inequalities for Left and Right- λ -Preinvex Functions in Interval-Valued Settings*, Axioms, Vol. 11, No. 8, 368, 2022; DOI: 10.3390/axioms11080368; ISSN: 2075-1680.
- **S. Treanță**, *Results on the Existence of Solutions Associated with Some Weak Vector Variational Inequalities*, Fractal and Fractional, Vol. 6, No. 8, 431, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6080431; ISSN: 2504-3110.
- **S. Treanță**, K. Nonlaopon, M.B. Khan, *On controlled Hamilton and Hamilton-Jacobi differential equations of higher-order*, Scientific Reports, Vol. 12, No. 1, 14633, 2022; DOI: 10.1038/s41598-022-18626-6; ISSN: 2045-2322.

- S.K. Sahoo, M.A. Latif, O.M. Alsalamy, **S. Treanță**, W. Sudsutad, J. Kongson, *Hermite-Hadamard, Fejér and Pachpatte Type Integral Inequalities for Center-Radius Order Interval-Valued Preinvex Functions*, *Fractal and Fractional*, Vol. 6, No. 9, 506, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6090506; ISSN: 2504-3110.
- M.B. Khan, **S. Treanță**, M.S. Soliman, *Generalized Preinvex Interval-Valued Functions and Related Hermite-Hadamard Type Inequalities*, *Symmetry-Basel*, Vol. 14, No. 9, 1901, 2022; DOI: 10.3390/sym14091901; eISSN: 2073-8994.
- W. Afzal, M. Abbas, J. Macías-Díaz, **S. Treanță**, *Some H-Godunova-Levin Function Inequalities Using Center Radius (Cr) Order Relation*, *Fractal and Fractional*, Vol. 6, No. 9, 518, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6090518; ISSN: 2504-3110.
- **S. Treanță**, M.B. Khan, S.K. Sahoo, T. Botmart, *Evolutionary problems driven by variational inequalities with multiple integral functionals*, *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No. 1, 1488-1508, 2023; DOI: 10.3934/math.2023075; ISSN: 2473-6988.
- **S. Treanță**, *Well-Posedness Results of Certain Variational Inequalities*, *Mathematics*, Vol. 10, No. 20, 3809, 2022; DOI: 10.3390/math10203809; eISSN: 2227-7390.
- W. Afzal, W. Nazeer, T. Botmart, **S. Treanță**, *Some properties and inequalities for generalized class of harmonical Godunova-Levin functions via center radius order relation*, *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No. 1, 1696-1712, 2023; DOI: 10.3934/math.2023087; ISSN: 2473-6988.
- W. Afzal, K. Shabbir, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *Jensen and Hermite-Hadamard type inclusions for harmonical h-Godunova-Levin functions*, *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No. 2, 3303-3321, 2023; DOI: 10.3934/math.2023170; ISSN: 2473-6988.
- B.B. Upadhyay, A. Ghosh, P. Mishra, **S. Treanță**, *Optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming problems on Hadamard manifolds using generalized geodesic convexity*, *RAIRO - Operations Research*, Vol. 56, No. 8, pp. 2037-2065, 2022; DOI: 10.1051/ro/2022098; ISSN: 0399-0559.
- M.B. Khan, **S. Treanță**, H. Alrweili, T. Saeed, M.S. Soliman, *Some New Riemann-Liouville Fractional Integral Inequalities for Interval-Valued Mappings*, *AIMS Mathematics*, Vol. 7, No. 8, 15659-15679, 2022; DOI: 10.3934/math.2022857; ISSN: 2473-6988.
- A. Jayswal, Preeti, **S. Treanță**, *Multi-dimensional Control Problems: Robust Approach*; Series ISSN: 2364-6837; Series E-ISSN: 2364-6845; Springer Singapore, 2022.

AIMS Mathematics (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.739.

Mathematics (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.592.

Fractal and Fractional (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 3.577.

Axioms (Q2 – zona galbenă) are factorul de impact 1.824.

Scientific Reports (Q2 – zona galbenă) are factorul de impact 4.996.

Symmetry-Basel (Q2 – zona galbenă) are factorul de impact 2.940.

RAIRO-Operations Research (Q3 – zona gri) are factorul de impact 2.526.

Springer este o editură internațională de înaltă calitate științifică.

B. Articole (capitole de carte) acceptate

- **S. Treanță**, *Controlled nonlinear dynamics for constrained optimization problems involving second-order partial derivatives*, In: Jayswal, A., Antczak, T. (Eds.). (2022). *Continuous Optimization and Variational Inequalities* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. eBook ISBN: 9781003289883.
- **S. Treanță**, *Results on the existence of solutions for some controlled optimization problems*, In: Debnath P., Srivastava H.M., Chakraborty K., Kumam P. (eds) *Advances in Number Theory and Applied Analysis*, Springer Nature, 2022.
- **S. Treanță**, *Necessary and sufficient optimality conditions for some robust variational problems*, *Optimal Control, Applications and Methods*, 2022; DOI: 10.1002/oca.2931; ISSN: 0143-2087.

Optimal Control, Applications and Methods (Q2 – zona galbenă) este o prestigioasă revistă internațională având factorul de impact 1.955.

C. Articole trimise spre publicare

- **S. Treanță**, *On a class of constrained robust nonlinear optimization problems*, *Applied Mathematical Modelling*, 2022.
- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *On some variational inequality constrained control problems*, *Journal of Inequalities and Applications*, 2022.

- **S. Treanță**, J.C. Yao, *Robust variational inequalities governed by curvilinear integral functionals*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 2022.

III. Detalierea rezultatelor

- **S. Treanță**, *Recent Advances of Constrained Variational Problems Involving Second-Order Partial Derivatives - A Review*, Mathematics, Vol. 10, No. 15, 2599, 2022; DOI: 10.3390/math10152599; eISSN: 2227-7390.

Această lucrare analizează dinamica neliniară generată de unele clase de probleme de control cu restricții care implică derivate parțiale de ordinul al doilea. În mod specific, sunt formulate și demonstrate condițiile necesare de optimalitate pentru problemele variaționale de control luate în considerare, guvernate de funcționale de tip integrală. În plus, buna-definire și inegalitățile variaționale asociate sunt luate în considerare în prezenta lucrare. Acest articol este structurat după cum urmează. Secțiunea 2 prezintă problema de control optimal constrânsă de EDP de ordinul al doilea (vezi teorema 1). Acest rezultat formulează condițiile necesare de optimalitate pentru problema de optimizare considerată, constrânsă de EDP. Secțiunea 3 prezintă condițiile necesare de optimalitate pentru o nouă clasă de probleme de control izoperimetrice constrânse, guvernate de integrale multiple și curbilini. În Secțiunea 4, utilizând pseudomonotonia, hemicontinuitatea și monotonia funcționalelor de tip integrală considerate, prezentăm buna-definire a unor probleme de inegalități variaționale, guvernate de derivate parțiale de ordinul al doilea. Secțiunea 5 formulează câteva probleme deschise foarte importante care vor fi investigate în studiile viitoare. Secțiunea 6 conține concluziile lucrării.

- T. Saeed, M.B. Khan, **S. Treanță**, H.H. Alsulami, M.Sh. Alhodaly, *Interval Fejér type Inequalities for Left and Right- λ -Preinvex Functions in Interval-Valued Settings*, Axioms, Vol. 11, No. 8, 368, 2022; DOI: 10.3390/axioms11080368; ISSN: 2075-1680.

Pentru funcțiile cu valori interval λ -preinvexe la stânga și dreapta, în contextul operatorului Riemann cu valori interval, formulăm inegalități de tip Hermite-Hadamard ($H-H$) în studiul curent. În plus, analizăm inegalități de tip Hermite-Hadamard Fejér ($H-H$ Fejér) pentru funcțiile λ -preinvexe la stânga și dreapta în anumite condiții slabe. Mai mult, se obțin și unele cazuri excepționale (noi și clasice). Sunt prezentate și câteva exemple utile pentru a demonstra validitatea rezultatelor.

- **S. Treanță**, *Results on the Existence of Solutions Associated with Some Weak Vector Variational Inequalities*, Fractal and Fractional, Vol. 6, No. 8, 431, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6080431; ISSN: 2504-3110.

În această lucrare, luând în considerare noțiunile de mulțime invexă, diferențiabilitate Frechet, invexitate și pseudoinvexitate pentru funcționalele implicate (de tip integrală curbilinie), stabilim câteva relații între soluțiile unei clase de inegalități variaționale vectoriale slabe și soluțiile (slabe) eficiente ale problemei de control asociate. Lucrarea este structurată după cum urmează. În Secțiunea 2, prezentăm rezultatele preliminare/auxiliare și descrierea problemei. În Secțiunea 3, formulăm și demonstrăm câteva rezultate de caracterizare asociate cu soluțiile problemelor de control considerate. În Secțiunea 4, prezentăm concluziile acestui studiu.

- **S. Treanță**, K. Nonlaopon, M.B. Khan, *On controlled Hamilton and Hamilton-Jacobi differential equations of higher-order*, Scientific Reports, Vol. 12, No. 1, 14633, 2022; DOI: 10.1038/s41598-022-18626-6; ISSN: 2045-2322.

În această lucrare, investigăm dinamica neliniară asociată cu Lagrangiani controlați care implică derivate de ordin superior. Mai precis, stabilim ecuațiile diferențiale ordinare controlate de ordin superior de tip Hamilton și ecuația cu derivate parțiale de tip Hamilton-Jacobi pentru clasa considerată (determinate de Lagrangiani guvernați de derivatele de ordin superior ale variabilelor de stare). Mai mult, formulăm și demonstrăm un rezultat de invarianță față de variabila de stare. În plus, pentru a valida rezultatele teoretice și pentru a evidenția eficacitatea acestora, sunt prezentate câteva aplicații ilustrative. Lucrarea este structurată după cum urmează. Secțiunea 2 prezintă instrumentele matematice necesare pentru stabilirea principalelor rezultate ale lucrării. Teoremele 1 și 2 prezintă ecuația diferențială controlată de tip Hamilton-Jacobi și, respectiv, un rezultat de invarianță față de variabila de stare. Aceste două teoreme reprezintă principalele rezultate ale acestei lucrări. În final, secțiunea 3 încheie prezenta lucrare de cercetare.

- S.K. Sahoo, M.A. Latif, O.M. Alsalmi, **S. Treanță**, W. Sudsutad, J. Kongson, *Hermite-Hadamard, Fejér and Pachpatte Type Integral Inequalities for Center-Radius Order Interval-Valued Preinvex Functions*, Fractal and Fractional, Vol. 6, No. 9, 506, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6090506; ISSN: 2504-3110.

Obiectivul acestui articol este de a stabili o legătură între conceptul de inegalități și funcții de ordine de tip Centru-Rază (CR), care sunt interesante datorită proprietăților și utilizării pe scară largă. Introducem noțiunea de funcție preinvexă cu valoare interval de tip CR cu ajutorul unei relații de ordine totală între două intervale. În plus, discutăm câteva proprietăți ale acestei noi clase de preinvexitate și arătăm că noul concept unifică mai multe concepte cunoscute în literatura de specialitate și dă naștere și unor noi definiții. Aplicând aceste noi definiții, prezentăm multe cazuri speciale clasice și noi care servesc drept aplicații ale constatărilor cheie ale studiului. Sunt date câteva exemple numerice pentru a valida rezultatele principale. Rezultatele confirmă că acest nou concept este foarte util în diverse inegalități. Rezultatele prezentate vor motiva cercetări ulterioare asupra inegalităților pentru funcții cu valori interval de tip fracțional, cu valori interval de tip fuzzy, și problemele de optimizare asociate acestora.

- M.B. Khan, **S. Treanță**, M.S. Soliman, *Generalized Preinvex Interval-Valued Functions and Related Hermite-Hadamard Type Inequalities*, Symmetry-Basel, Vol. 14, No. 9, 1901, 2022; DOI: 10.3390/sym14091901; eISSN: 2073-8994.

Acest studiu își propune să conecteze ideea de inegalități cu operatorii integrali de tip Riemann, care prezintă interes datorită caracteristicilor și utilizării lor pe scară largă. Creăm o nouă inegalitate integrală de tip Hermite-Hadamard pentru o funcție cu valoare interval w -preinvex folosind un operator integral de tip interval. În contextul relațiilor de pseudo-ordine, stabilim și noi variații ale inegalităților de tip Fejér și ale inegalităților de tip Pachpatte. Verificăm în continuare veridicitatea concluziilor pe care le-am tras din acest

studiu, oferind o serie de exemple numerice. Rezultatele prezentate în această lucrare, în opinia noastră, sunt inovatoare și vor ajuta la stimularea mai multor studii în acest domeniu.

- W. Afzal, M. Abbas, J. Macías-Díaz, **S. Treanță**, *Some H-Godunova-Levin Function Inequalities Using Center Radius (Cr) Order Relation*, *Fractal and Fractional*, Vol. 6, No. 9, 518, 2022; DOI: 10.3390/fractalfract6090518; ISSN: 2504-3110

Știința a beneficiat foarte mult de generalizarea convexității atât în științele aplicate, cât și în cele pure. Conceptele de convexitate și inegalitate integrală pot fi legate în conformitate cu definițiile lor. Din ultimii ani, am constatat că este inevitabil ca cele două să fie din ce în ce mai interconectate și este posibil să putem folosi ceea ce învățăm de la unul și să îl aplicăm și celuilalt. Folosind metode și concepte unice și imaginative, sunt construite diverse inegalități integrale pentru funcțiile convexe. În această lucrare, sunt introduse diferite tipuri de inegalități folosind relația de ordine centrală (CR). Relația de ordine (CR) ne permite în primul rând să derivăm unele inegalități Hermite-Hadamard (H-H) și apoi să prezentăm inegalitatea de tip Jensen pentru funcțiile cu valori interval h-Godunova-Levin, folosind operatorul integral Riemann. Acest tip de convexitate unifică mai multe funcții convexe noi și binecunoscute. În plus, studiul include exemple utile pentru a-și susține concluziile.

- **S. Treanță**, M.B. Khan, S.K. Sahoo, T. Botmart, *Evolutionary problems driven by variational inequalities with multiple integral functionals*, *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No. 1, 1488-1508, 2023; DOI: 10.3934/math.2023075; ISSN: 2473-6988.

În această lucrare, autorii se consacră extinderii soluțiilor bine-cunoscute slab ascuțite pentru inegalitățile variaționale la o inegalitate de tip variațional controlată, guvernată de funcționale convexe de tip integrală multiplă. Simultan, unele condiții echivalente privind slab ascuțimea soluțiilor inegalității considerate sunt obținute prin utilizarea proprietății de suficiență a principiului de minim. Lucrarea este împărțită după cum urmează. În Secțiunea 2, prezentăm preliminariile și problema studiată. Pentru a stabili principalele rezultate ale acestei lucrări, mai multe rezultate auxiliare sunt formulate în Secțiunea 3. În Secțiunea 4, studiem soluții slab ascuțite asociate clasei considerate de inegalități variaționale controlate, care implică funcționale convexe de tip integrală multiplă. Mai mult, se stabilește o relație între proprietatea de suficiență a principiului de minim și slab ascuțimea soluțiilor pentru inegalitatea de tip variațional controlată considerată. Secțiunea 5 încheie studiul.

- **S. Treanță**, *Well-Posedness Results of Certain Variational Inequalities*, *Mathematics*, Vol. 10, No. 20, 3809, 2022; DOI: 10.3390/math10203809; eISSN: 2227-7390.

Rezultatele de bună-definire și bună-definire generalizată sunt examinate pentru o clasă de probleme de inegalități variaționale comandate. În acest sens, prin utilizarea conceptelor de hemicontinuitate, monotonie și pseudomonotonie ale funcționalei considerate, și prin introducerea mulțimii de soluții aproximative ale problemelor de inegalități variaționale comandate considerate, stabilim câteva rezultate de bună-definire și

bună-definire generalizată. Mai mult, sunt prezentate câteva exemple ilustrative pentru a evidenția eficacitatea rezultatelor obținute în lucrare.

- W. Afzal, W. Nazeer, T. Botmart, **S. Treanță**, *Some properties and inequalities for generalized class of harmonical Godunova-Levin functions via center radius order relation*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 1, 1696-1712, 2023; DOI: 10.3934/math.2023087; ISSN: 2473-6988.

Acest studiu prezintă un concept armonic cr-h-GL pentru (IVFS). Folosind acest nou concept, studiem inegalitățile Jensen și (H-H) pentru (IVFS). Acest studiu generalizează rezultatele dezvoltate de Shi et al. [1] și Almutairi [2]. Mai multe exemple relevante sunt oferite ca sprijin suplimentar pentru rezultatele de bază. Ar putea fi interesant să se determine inegalități echivalente pentru diferite tipuri de convexitate în viitor. Sub influența acestui concept, o nouă direcție începe să apară în teoria optimizării convexe. Folosind relația de orine (cr), vom studia analiza automată a erorilor cu intervale și vom aplica funcții armonic cr-h-GL pentru a optimiza problemele. Sperăm că alți cercetători din diverse discipline științifice vor beneficia de acest concept.

[1] F. F. Shi, G. J. Ye, W. Liu, D. F. Zhao, *cr-h-convexity and some inequalities for cr-h-convex function*, Filomat, 10 (2022).

[2] O. Almutairi, A. Kilicman, *Some integral inequalities for h-Godunova-Levin preinvexity*, Symmetry, 11 (2019), 1500.

- W. Afzal, K. Shabbir, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *Jensen and Hermite-Hadamard type inclusions for harmonical h-Godunova-Levin functions*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 2, 3303-3321, 2023; DOI: 10.3934/math.2023170; ISSN: 2473-6988.

Rolul inegalităților integrale poate fi văzut atât în domeniul matematicii aplicate, cât și în cel teoretic. Conform definiției convexității, este posibil să relaționăm ambele concepte de convexitate și inegalitate integrală. În plus, convexitatea joacă un rol cheie în tema incluziunilor ca urmare a comportamentului său definițional. Importanța și aplicațiile funcțiilor convexe sunt bine cunoscute, în special în domeniile integrării, inegalității variaționale și optimizării. În această lucrare, sunt introduse diferite tipuri de inegalități folosind relația de incluziune. Relația de incluziune ne permite mai întâi să derivăm unele inegalități Hermite-Hadamard, apoi să prezentăm inegalitatea Jensen pentru funcții armonice cu valori interval h-Godunova-Levin, prin operatorul integral de tip Riemann. Mai mult, constatările prezentate în acest studiu au fost verificate cu ajutorul unor exemple utile.

- B.B. Upadhyay, A. Ghosh, P. Mishra, **S. Treanță**, *Optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming problems on Hadamard manifolds using generalized geodesic convexity*, RAIRO - Operations Research, Vol. 56, No. 8, pp. 2037-2065, 2022; DOI: 10.1051/ro/2022098; ISSN: 0399-0559.

Această lucrare tratează probleme de programare semi-infinită multiobiectivă pe varietăți Hadamard. Stabilim criteriile suficiente de optimalitate ale problemei luate în considerare în ipotezele generalizate de convexitate geodezică. Mai mult, formulăm problemele duale de tip Mond-Weir și Wolfe și derivăm teoremele de dualitate inversă slabă, tare și strictă, care relaționează problemele primale și duale în ipotezele

convexității geodezice generalizate. Au fost date, de asemenea, exemple adecvate pentru a ilustra semnificația acestor rezultate. Rezultatele prezentate în această lucrare extind și generalizează rezultatele corespunzătoare din literatura de specialitate.

- M.B. Khan, **S. Treanță**, H. Alrweili, T. Saeed, M.S. Soliman, *Some New Riemann-Liouville Fractional Integral Inequalities for Interval-Valued Mappings*, AIMS Mathematics, Vol. 7, No. 8, 15659-15679, 2022; DOI: 10.3934/math.2022857; ISSN: 2473-6988.

Am introdus clasa de funcții J-convexe la stânga și dreapta prin intermediul unei relații de pseudo-ordine și am investigat unele proprietăți. Au fost demonstrate unele inegalități noi pentru funcțiile J-convexe la stânga și dreapta cu valori interval. Rezultatele acestui studiu pot fi aplicate în optimizare, analiza incertitudinii, precum și în diferite domenii ale științelor aplicate și pure. Intenționăm să folosim diferite tipuri de funcții convexe la stânga și la dreapta pentru a construi inegalități de interval ale funcțiilor cu valori interval prin intermediul relațiilor de pseudo-ordine și al operatorului integral fracțional de tip Riemann-Liouville.

- A. Jayswal, Preeti, **S. Treanță**, *Multi-dimensional Control Problems: Robust Approach*; Series ISSN: 2364-6837; Series E-ISSN: 2364-6845; Springer Singapore, 2022.

Prezenta carte se concentrează pe acea parte a calculului variațiilor și a aplicațiilor aferente în prezența incertitudinii, care combină instrumente și metode din ecuații cu derivate parțiale cu teoria controlului optimal multidimensional. Mai precis, această carte este dedicată problemelor incerte de optimizare neliniară care provin din diferite domenii, cu referire în special la cele care introduc noi tehnici capabile să rezolve o gamă largă de probleme. Cu diverse exemple și aplicații, pentru a completa și fundamenta evoluțiile matematice, această carte este un ghid valoros pentru cercetători, ingineri și studenți în domeniul matematicii, al științei controlului optimal, al inteligenței artificiale, al științei managementului și al economiei.

IV. Concluzii

- potrivit planului de lucru, ce descrie sarcinile specifice științifice și neștiințifice legate de obiectivele proiectului, suntem în conformitate;
- lucrările trimise spre publicare (sau în lucru) continuă să trateze subiecte menționate ca și obiective specifice ale proiectului de cercetare.

05.12.2022

Savin Treanta

Silviu-Aurelian Urziceanu