



UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI  
FACULTATEA DE ȘTIINȚE APLICATE



# Buna-definire, rezultate de existență și caracterizare a soluțiilor pentru anumite probleme variaționale

Director de proiect: SAVIN TREANȚĂ

*Academia Oamenilor de Știință din România,*

*54 Splaiul Independenței, 050044 București, România*

*18 Iulie 2022*

# Cuprins

1. Abstract



2. Rezultate obținute



3. Detalierea rezultatelor



4. Concluzii

# 1. Abstract

- ▶ Tema de cercetare, în care a fost înaintată propunerea de proiect, este unul dintre punctele importante și de actualitate ale comunității relevante de cercetare. Aceasta include metode de optimizare robustă și incertă, și teoria controlului optimal cu aplicații în inginerie, sisteme fizice și socio-economice. Distingem următoarele *obiective specifice*: (A) buna-definire, condiții de eficiență și rezultate de echivalență asociate cu noile clase de probleme variaționale; (B) introducerea unor probleme variaționale robuste modificate și criteriile de eficiență asociate de tip punct șa; (C) abordarea Lagrange-Hamilton-Jacobi și studiul soluțiilor robuste slabe ascuțite în problemele considerate; (D) eficacitatea și aplicațiile problemelor studiate.

## 2. Rezultate obținute

► În cadrul acestui proiect în anul 2022, în intervalul 01.05.2022-30.07.2022, au fost obținute următoarele rezultate:

### A. Articole publicate

- **S. Treanță**, *Robust optimality in constrained optimization problems with application in mechanics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 515, No. 2, 126440, 2022; DOI: [10.1016/j.jmaa.2022.126440](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126440); ISSN: 0022-247X.
- M.B. Khan, O.M. Alsalami, **S. Treanță**, T. Saeed, K. Nonlaopon, *New Class of Convex Interval-Valued Functions and Riemann Liouville Fractional Integral Inequalities*, AIMS Mathematics, Vol. 7, No. 8, 15497-15519, 2022; DOI: [10.3934/math.2022849](https://doi.org/10.3934/math.2022849); ISSN: 2473-6988.
- M.A. Aslam Noor, K.I. Noor, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *On three-step iterative schemes associated with general quasi-variational inclusions*, Alexandria Engineering Journal, Vol. 61, No. 12, 12051-12059, 2022; DOI: [10.1016/j.aej.2022.05.031](https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.05.031); ISSN: 1110-0168.
- **S. Treanță**, *On some vector variational inequalities and optimization problems*, AIMS Mathematics, Vol. 7, No. 8, 14434-14443, 2022; DOI: [10.3934/math.2022795](https://doi.org/10.3934/math.2022795); ISSN: 2473-6988.

*Journal of Mathematical Analysis and Applications* (Q1 – zona roșie) este o revistă internațională de înaltă calitate științifică având un *factor de impact de 1.583* și un *scor relativ de influență de 1.118*.

*AIMS Mathematics* (Q1 – zona roșie) are *factorul de impact 1.427* și *scorul relativ de influență 0.480*.

*Alexandria Engineering Journal* (Q1 – zona roșie) are *factorul de impact 3.732* și *scorul relativ de influență 1.397*.

B. Articole (capitole de carte) acceptate

- B.B. Upadhyay, A. Ghosh, P. Mishra, **S. Treanță**, *Optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming problems on Hadamard manifolds using generalized geodesic convexity*, RAIRO - Operations Research, 2022; DOI: 10.1051/ro/2022098; ISSN: 0399-0559.
- M.B. Khan, **S. Treanță**, T. Saeed, M.S. Soliman, *Some New Riemann-Liouville Fractional Integral Inequalities for Interval-Valued Mappings*, AIMS Mathematics, 2022; DOI: [10.3934/math.2022795](https://doi.org/10.3934/math.2022795); ISSN: 2473-6988.
- B.B. Upadhyay, **S. Treanță**, P. Mishra, *On Minty Variational Principle for Nonsmooth Multiobjective Optimization Problems on Hadamard Manifolds*, Optimization, 2022; DOI: 10.1080/02331934.2022.2088369; ISSN: 0233-1934.
- **S. Treanță**, *Necessary and sufficient optimality conditions for some robust variational problems*, Optimal Control, Applications and Methods, 2022; DOI: 10.1002/oca.2931; ISSN: 0143-2087.
- **S. Treanță**, *Results on the existence of solutions for some controlled optimization problems*, In: Debnath P., Srivastava H.M., Chakraborty K., Kumam P. (eds) *Advances in Number Theory and Applied Analysis*, Springer Nature, 2022.

*Optimization* (Q1 – zona roșie) este o revistă internațională de înaltă calitate științifică având un *factor de impact de 2.360* și un *scor relativ de influență de 0.998*.

*Optimal Control, Applications and Methods* (Q1 – zona roșie) este o revistă internațională de înaltă calitate științifică având un *scor relativ de influență de 0.674*.

*RAIRO-Operations Research* are *factorul de impact 1.393* și *scorul relativ de influență 0.341*.

C. Articole trimise spre publicare sau în lucru

- **S. Treanță**, *On a class of constrained robust nonlinear optimization problems*, Chaos, Solitons and Fractals, 2022.
- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *On some variational inequality constrained control problems*, Journal of Inequalities and Applications, 2022.

### 3. Detalierea rezultatelor

- S. Treanță, *Robust optimality in constrained optimization problems with application in mechanics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 515, No. 2, 126440, 2022; DOI: [10.1016/j.jmaa.2022.126440](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126440); ISSN: 0022-247X.

Această lucrare tratează condițiile necesare și suficiente de optimalitate pentru o nouă problemă de optimizare robustă care implică funcționale integrale curbilinii (lucrul mecanic), care sunt independente de drum și sunt determinate de Lagrangiani controlați multidimensionali de ordinul doi, având date incerte. Mai precis, utilizând noțiunea de *integrală curbilinie convexă*, furnizată de o 1-formă Lagrange controlată, complet integrabilă cu date incerte, și conceptul de *soluție optimală slabă robustă* la problema studiată, construim un nou context matematic pentru a enunța condițiile de optimalitate care sunt necesare și suficiente pentru ca un punct să fie un extrem a noii clase studiate de probleme de optimizare robuste cu incertitudine în funcționalele de constrângere și obiectiv. De asemenea, introducem conceptul de *punct Kuhn-Tucker robust* și stabilim un rezultat de caracterizare. Mai mult, prezentăm un exemplu ilustrativ non-trivial pentru a valida rezultatele stabilite în lucrare.

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{(s(\cdot), \vartheta(\cdot))} \int_{\Delta} \phi_{\kappa}(t, s(t), s_{\sigma}(t), s_{\alpha\beta}(t), \vartheta(t), w) dt^{\kappa}$$

subject to

$$\varphi(t, s(t), s_{\sigma}(t), s_{\alpha\beta}(t), \vartheta(t), a) \leq 0, \quad t \in K$$

$$\chi(t, s(t), s_{\sigma}(t), s_{\alpha\beta}(t), \vartheta(t), b) = 0, \quad t \in K$$

$$s(t_0) = s_0, \quad s(t_1) = s_1, \quad s_{\sigma}(t_0) = s_{\sigma 0}, \quad s_{\sigma}(t_1) = s_{\sigma 1},$$



**Theorem 3.1.** Consider  $(\bar{s}, \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}$  is a robust weak optimal solution for the robust optimal control problem  $(\mathcal{P})$  and  $\max_{w \in \mathcal{W}} \phi_\kappa(\Lambda, w) = \phi_\kappa(\Lambda, \bar{w}), \kappa = \overline{1, p}$ . In this case, there exist  $\bar{\xi} \in \mathbb{R}$ , the piecewise smooth functions  $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_l(t)) \in \mathbb{R}_+^m, \bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_\zeta(t)) \in \mathbb{R}^n$ , and the uncertain parameters  $\bar{a} \in \mathcal{A}$  and  $\bar{b} \in \mathcal{B}$  satisfying

$$\begin{aligned} & \bar{\xi} \frac{\partial \phi_\kappa}{\partial s}(\bar{\Lambda}, \bar{w}) + \bar{\pi}^T \varphi_s(\bar{\Lambda}, \bar{a}) + \bar{\gamma}^T \chi_s(\bar{\Lambda}, \bar{b}) \\ & - D_\sigma \left[ \bar{\xi} \frac{\partial \phi_\kappa}{\partial s_\sigma}(\bar{\Lambda}, \bar{w}) + \bar{\pi}^T \varphi_{s_\sigma}(\bar{\Lambda}, \bar{a}) + \bar{\gamma}^T \chi_{s_\sigma}(\bar{\Lambda}, \bar{b}) \right] \\ & + \frac{1}{\eta(\alpha, \beta)} D_{\alpha\beta}^2 \left[ \bar{\xi} \frac{\partial \phi_\kappa}{\partial s_{\alpha\beta}}(\bar{\Lambda}, \bar{w}) + \bar{\pi}^T \varphi_{s_{\alpha\beta}}(\bar{\Lambda}, \bar{a}) + \bar{\gamma}^T \chi_{s_{\alpha\beta}}(\bar{\Lambda}, \bar{b}) \right] = 0, \quad \kappa = \overline{1, p} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\bar{\xi} \frac{\partial \phi_\kappa}{\partial \vartheta}(\bar{\Lambda}, \bar{w}) + \bar{\pi}^T \varphi_\vartheta(\bar{\Lambda}, \bar{a}) + \bar{\gamma}^T \chi_\vartheta(\bar{\Lambda}, \bar{b}) = 0, \quad \kappa = \overline{1, p} \quad (2)$$

$$\bar{\pi}^T \varphi(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = 0, \quad \bar{\pi} \geq 0, \quad (3)$$

$$\bar{\xi} \geq 0, \quad (4)$$

for all  $t \in K$ , except at discontinuities.

**Theorem 4.1.** Consider  $(\bar{s}, \bar{\vartheta}) \in \mathcal{X}$  is a robust feasible solution for the robust optimal control problem  $(\mathcal{P})$  such that the robust necessary conditions of optimality given in (1)-(4) are satisfied. Further, assume that  $\int_{\Delta} \bar{\xi} \phi_{\kappa}(\Lambda, \bar{w}) dt^{\kappa}$ ,  $\int_{\Delta} \bar{\pi}^T \varphi(\Lambda, \bar{a}) dt^{\kappa}$ , and  $\int_{\Delta} \bar{\gamma}^T \chi(\Lambda, \bar{b}) dt^{\kappa}$  are convex at  $(\bar{s}, \bar{\vartheta})$ . Then,  $(\bar{s}, \bar{\vartheta})$  is a robust weak optimal solution for the robust optimal control problem  $(\mathcal{P})$ .

- M.B. Khan, O.M. Alsalami, **S. Treanță**, T. Saeed, K. Nonlaopon, *New Class of Convex Interval-Valued Functions and Riemann Liouville Fractional Integral Inequalities*, AIMS Mathematics, Vol. 7, No. 8, 15497-15519, 2022; DOI: [10.3934/math.2022849](https://doi.org/10.3934/math.2022849); ISSN: 2473-6988.

Aprecierea inegalităților în convexitate este critică pentru calculul fracțional și aplicarea acestuia într-o varietate de domenii. În această lucrare, oferim o analiză unică bazată pe inegalitățile Hermite-Hadamard în contextul clasei de convexitate nou definite, care este cunoscută sub denumirea de FIV armonic  $h$ -convexă la stânga și la dreapta (FIV la stânga și la dreapta  $\mathcal{H}$ - $h$ -convexă). De asemenea, anumite inegalități integrale și fracționale sunt abordate prin tehnica sugerată. Datorită caracterului său intrigant în științele numerice, există o legătură puternică între operatorii fracționali și convexitate. Au fost, de asemenea, studiate mai multe circumstanțe excepționale și numeroase inegalități Hermite-Hadamard bine-cunoscute au fost derivate pentru FIV  $\mathcal{H}$ - $h$ -convexă la stânga și dreapta. Mai mult, unele aplicații sunt prezentate și în termeni de cazuri speciale pentru cele discutate în acest studiu. Rezultatele principale demonstrează că abordarea poate fi implementată imediat și este simplă și precisă din punct de vedere computațional. Constatările noastre generalizează anumite descoperiri din literatură, noi și clasice, de convexitate armonică.

- M.A. Aslam Noor, K.I. Noor, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *On three-step iterative schemes associated with general quasi-variational inclusions*, Alexandria Engineering Journal, Vol. 61, No. 12, 12051-12059, 2022; DOI: [10.1016/j.aej.2022.05.031](https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.05.031); ISSN: 1110-0168.

În această lucrare, având motivația din lucrările precedente de cercetare, introducem câteva tipuri noi de incluziuni variaționale, care se numesc incluziuni cvasivariaționale generale. Mai mult, investigăm câteva cazuri speciale importante. Arătăm că problemele de punct fix și incluziunile cvasivariaționale generale sunt echivalente. Acest punct de vedere este util pentru a studia existența unei soluții în rezolvarea incluziunilor cvasivariaționale generale. Folosind tehnica de actualizare, sugerăm și luăm în considerare câteva metode aproximative în trei pași înainte-înapoi pentru rezolvarea incluziunilor cvasivariaționale generale. Ca și cazuri speciale, obținem iterațiile Mann și iterațiile Ishikawa în doi pași pentru rezolvarea incluziunilor variaționale. Analiza convergenței este formulată în anumite condiții adecvate pentru metodele iterative propuse. În această lucrare, luăm în considerare doar elementele teoretice ale tehnicii propuse. Scopul lucrărilor noastre ulterioare de cercetare este de a implementa aceste metode numeric și de a asigura eficacitatea lor.

- **S. Treanță**, *On some vector variational inequalities and optimization problems*, AIMS Mathematics, Vol. 7, No. 8, 14434-14443, 2022; DOI: [10.3934/math.2022795](https://doi.org/10.3934/math.2022795); ISSN: 2473-6988.

Kim [1] a formulat unele relații între problema vectorială în timp continuu și inegalitatea variațională vectorială. După cum se știe, problemele de control optimal, considerate probleme variaționale în timp continuu, reprezintă un ingredient puternic pentru investigarea multor probleme de inginerie sau procese care provin din teoria jocurilor, economie, cercetare operațională. Pentru aceasta, Treanță [2.3] și Jha și colab. [4] au contribuit și au formulat condiții necesare și suficiente de optimalitate (eficiență), criteriu de tip punct șa, buna-definire sau metoda funcției obiectiv modificate pentru diverse probleme multidimensionale de control determinate de funcționale de tip integrală multiplă sau curbilinie.

Ca o continuare firească a progreselor menționate mai sus, în lucrarea de față introducem inegalitățile vectoriale variaționale controlate și problema variațională controlată multiobiectivă corespunzătoare, determinată de funcționale de tip integrală curbilinie, care sunt independente de drum. Considerând o nouă formă a noțiunii de mulțime invexă în raport cu unele funcții date, stabilim anumite relații între soluțiile problemelor variaționale multidimensionale considerate.

$$(CP) \quad \min_{(u,v)} \left\{ H(u, v) = \int_{\mathbf{C}} h_{\beta}(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta} \right\} \text{ subject to } (u, v) \in \mathcal{S},$$

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_{\mathbf{C}} h_{\beta}(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta} \\ &= \left( \int_{\mathbf{C}} h_{\beta}^1(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta}, \dots, \int_{\mathbf{C}} h_{\beta}^p(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta} \right) \\ &= (H^1(u, v), \dots, H^p(u, v)) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (u, v) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V} \mid Z(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) = 0, Y(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) \leq 0, \right. \\ \left. (u, v)|_{\zeta=\zeta_1, \zeta_2} = \text{given} \right\}.$$

Now, in order to formulate and prove some results on the existence of solutions for problem (CP), we introduce the following *vector controlled variational inequalities*: find  $(u^0, v^0) \in \mathcal{S}$  such that there exists no  $(u, v) \in \mathcal{S}$  satisfying

$$\begin{aligned}
 (VI) \quad & \left( \int_{\mathcal{C}} \left[ \frac{\partial h_{\beta}^1}{\partial u} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) \vartheta + \frac{\partial h_{\beta}^1}{\partial v} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) v \right] d\zeta^{\beta} \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\mathcal{C}} \left[ \frac{\partial h_{\beta}^1}{\partial u_{\alpha}} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) D_{\alpha} \vartheta \right] d\zeta^{\beta}, \dots, \right. \\
 & \quad \left. \int_{\mathcal{C}} \left[ \frac{\partial h_{\beta}^p}{\partial u} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) \vartheta + \frac{\partial h_{\beta}^p}{\partial v} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) v \right] d\zeta^{\beta} \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\mathcal{C}} \left[ \frac{\partial h_{\beta}^p}{\partial u_{\alpha}} (\zeta, u^0(\zeta), u_{\alpha}^0(\zeta), v^0(\zeta)) D_{\alpha} \vartheta \right] d\zeta^{\beta} \right) \leq 0.
 \end{aligned}$$

**Theorem 3.1** *Let  $\mathcal{S} \subset U \times V$  be an invex set with respect to  $\vartheta$  and  $v$ , and let  $(u^0, v^0) \in \mathcal{S}$  be a proper efficient solution of (CP). If each curvilinear integral*

$$\int_{\mathcal{C}} h_{\beta}^l(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta}, \quad l = \overline{1, p},$$

*is Fréchet differentiable at  $(u^0, v^0) \in \mathcal{S}$ , then the pair  $(u^0, v^0)$  solves (VI).*



**Theorem 3.2** *Let  $(u^0, v^0) \in \mathcal{S}$  be a solution of (VI). If each curvilinear integral  $\int_{\mathcal{C}} h_{\beta}^l(\zeta, u(\zeta), u_{\alpha}(\zeta), v(\zeta)) d\zeta^{\beta}$ ,  $l = \overline{1, p}$ , is Fréchet differentiable and invex at  $(u^0, v^0) \in \mathcal{S}$  with respect to  $\vartheta$  and  $v$ , then the pair  $(u^0, v^0)$  is an efficient solution of (CP).*

## 4. Concluzii

- ▶ Potrivit planului de lucru, ce descrie sarcinile specifice științifice și neștiințifice legate de obiectivele proiectului, suntem în conformitate;
- ▶ Lucrările trimise spre publicare (sau în lucru) continuă să trateze subiecte menționate ca și obiective specifice ale proiectului de cercetare.

Vă mulțumesc pentru atenție!