

ACADEMIA OAMENILOR DE ȘTIINȚĂ
DIN ROMÂNIA

– Secția de științe fizice –

CS Dr. Virgil V. BĂRAN

CALCUL SIMBOLIC PENTRU REZOLVAREA
PROBLEMELOR DE MAI MULTE ȚORPURI ÎN MECANICA
CUANTICĂ

– Aproximări și alte aplicații ale matematicii în fizică și inginerie –

– Raport intermediar –

Director de proiect
CS I Dr. Doru Sabin DELION

București, 2019

Introducere

Modelul de clusterizare α pentru nucleele atomice a fost propus pentru a explica stabilitatea nucleelor usore $4n$ [1, 2]. Principala dificultate teoretica este legata de puternicele efecte de antisimetrizare intre nucleonii ce formeaza structurile de tip α . Acestea au fost incluse in diverse modele microscopice de clustering α [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11].

In acelasi timp, o versiune simplificata in care se trateaza perechile de protoni si neutroni in aproximatia bozonica a avut succes in a explica efectul de staggering par-impar al energiilor de legatura [12]. In nuclee medii si grele clustering-ul α poate fi legat experimental de fenomenul de dezintegrare α [13]. O componenta de clustering α a campului mediu este necesara, pe langa baza uniparticula standard, pentru a descrie valorile absolute ale largimilor de dezintegrare α [14, 15]. Acest fapt este legat de aparitia particulelor α numai la densitati nucleare relativ scazute [16], situatie ce se realizeaza pe suprafata nucleelor emitatoare α [17].

O situatie similara se regaseste in cazul configuratiilor speciale precum starea Hoyle in ^{12}C , care poate fi vazuta ca o grupare slab legata de trei particule α condensate, ca bozoni, in starea $0S$ a campului lor mediu. Intelegerea dinamicii clusterilor α in astfel de situatii a fost semnificativ imbunatatita de abordarea recenta THSR [18]. O condensare de tip bozonic inasa nu este realizata pentru sisteme finite de fermioni clusterizati, intrucat in general exista manifestari reziduale semnificative ale principiului de excluziune Pauli. Cu toate acestea, o proprietate utila a abordarii THSR este aceea de a cuprinde cele doua limite opuse, aceea de determinant Slated pur, precum si aceea in care cele doua particule α sunt suficient de departate pentru a putea permite neglijarea efectelor principiului Pauli [19].

De asemenea, recent a fost propus modelul Quartet Condensation Model (QCM) pentru studiul corelatiilor de quarteting in nuclee $N = Z$ [24, 25], acesta fiind dezvoltat ulterior in Refs. [26, 27, 28, 29, 30, 31] la cazul pairingului izoscalar si pentru nuclee $N > Z$. Modele microscopice de quartet mai generale au fost de asemenea recent dezvoltate [32, 33, 34, 35, 36, 37]. In abordarile de tip quarteting, caramizile de baza ale modelelor nu sunt perechile Cooper standard, ci structuri de patru corpuri compuse din doi protoni si doi neutroni cuplati la izospin total $T = 0$ si la moment cinetic $J = 0$, denumite "quarteti de tip α ". Abordarea QCM s-a dovedit a fi foarte precisa pentru descrierea corelatiilor prezente in starea fundamentala a nucleelor $N = Z$. Efectele de antisimetrizare sunt semnificative in aceste configuratii, astfel incat realizarea unui condensat α , in sensul mentionat anterior, este o problema deschisa.

Astfel, in cele ce urmeaza, vom folosi termenii de "condensat de perechi" si "condensat de quarteti" pentru a indica starile de proba de tip BCS proiectat (PBCS) si de tip QCM din ecuatiile (2.2) si (2.10).

Este de notat ca exista dificultati intrinseci si in descrierea corelatiilor relativ simple de pairing, ceea ce a condus la eforturi semnificative dedicate formularii de descrieri aproximate, precum RPA [39] si metode de tip coupled clusters [40, 41, 42]. Recent, un tratament aproximativ interesant pentru corelatiile de pairing a fost dezvoltat in [43], pornind de la reformularea condensatului PBCS in termeni de excitatii particula-gol. In cele ce urmeaza vom generaliza aceste idei la cazul mai complicat al corelatiilor de quartet. Vom arata ca descrierea in termeni de excitatii particula-gol este naturala pentru ambele modele, PBCS si QCM. Suntem astfel motivati sa gasim reprezentarea condensatului de quarteti QCM in termeni de excitatii particula-gol fata de starea Hartree-Fock (a se vedea ecuatiile (2.14-2.15) mai jos).

De asemenea, vom introduce o noua abordare hibrida fermionic-bozonica, ce poate fi aplicata atat corelatiilor de pairing cat si celor de quarteting pentru simplificarea studiului corelatiilor in starea fundamentala. Primul pas al metodei presupune reformularea condensatului fata de starea corelata Hartree-Fock, spre deosebire de starea de vid $|0\rangle$. Acest fapt asigura ca o cantitate semnificativa de corelatii sunt deja incorporate, daca trecem la grade de libertate bozonice dar pastram aceeasi structura a starii de proba. In aceste conditii, cea mai simpla corespondenta de la operatori de perechi fermionice la bozoni ofera o buna descriere a proprietatilor starii fundamentale atat in cazul de pairing cat si de quarteting, fata de cazul exact fermionic.

Cu toate ca ideea de baza de a considera corelatiile de quarteting intr-un formalism bozonic (a se vedea [12], [45, 46, 47, 48]), precum si aceea de a considera aproximatia bozonica pentru excitatiile particula-gol nu sunt noi [49], abordarea in doua etape nu a mai fost implementata in felul prezentat anterior.

Este de remarcat ca in ambele cazuri, de pairing si quarteting, formalismul este asemanator din punct de vedere structural, ducand la aceeasi forma functionala a energiei condensatului bozonic, pana la factori de forma. In acest sens, o descriere unificata a corelatiilor de pairing si a celor de quarteting (semnificativ mai complicate) este posibila.

Cadrul teoretic

Consideram un model avand un numar N_{lev} de nivele dublu degenerate i, \bar{i} de energii uniparticula ϵ_i , unde starea fundamentala a Hamiltonianului

$$H = \sum_{i=1}^{N_{lev}} \epsilon_i \left(c_i^\dagger c_i + c_{\bar{i}}^\dagger c_{\bar{i}} \right) + \sum_{i,j=1}^{N_{lev}} V_{ij} P_i^\dagger P_j , \quad (2.1)$$

este considerata a fi condensatul PBCS de n_p perechi,

$$|PBCS\rangle = \left(\Gamma^\dagger(x) \right)^{n_p} |0\rangle . \quad (2.2)$$

O pereche coerenta este o superpozitie de perechi uniparticula $P_i^\dagger = c_i^\dagger c_i^\dagger$,

$$\Gamma^\dagger(x) = \sum_{i=1}^{N_{\text{lev}}} x_i P_i^\dagger, \quad (2.3)$$

iar $|0\rangle$ este starea de vid fara particula.

Urmand [50, 43], in loc sa exprimam starea $|PBCS\rangle$ fata de vidul $|0\rangle$, putem gasi o expresie echivalenta in termeni de starea Hartree-Fock

$$|\text{HF}\rangle = \left(\prod_{i=1}^{n_p} P_i^\dagger \right) |0\rangle. \quad (2.4)$$

Descompunem mai intai perechea coerenta in componente deasupra si dedesubtul nivelului Fermi

$$\Gamma^\dagger(x) = \sum_{i=1}^{n_p} x_i P_i^\dagger + \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} x_i P_i^\dagger \equiv \Gamma_h^\dagger(x) + \Gamma_p^\dagger(x) \quad (2.5)$$

Actiuna componentei pe subspatiul de goluri de argumente x pe vidul $|0\rangle$ poate fi exprimata in termeni de actiunea perechii coerente de argumente inverse $1/x$ pe starea Hartree-Fock. Astfel, poate fi demonstrata reformularea condensatului de perechi

$$|PBCS\rangle = n_p! \cdot \Pi_1 \sum_{j=0}^{n_p} \frac{1}{(j!)^2} \left(\Gamma_p^\dagger(x) \Gamma_h \left(\frac{1}{x} \right) \right)^j |\text{HF}\rangle, \quad (2.6)$$

unde $\Pi_1 = x_1 x_2 \cdots x_{n_p}$.

Aceasta abordare poate fi generalizata la corelatii de quartet. Astfel, consideram Hamiltonianul de pairing izovector

$$H = \sum_{i=1}^{N_{\text{lev}}} \epsilon_i (N_{i,\pi} + N_{i,\nu}) + \sum_{\tau=0,\pm 1} \sum_{i,j=1}^{N_{\text{lev}}} V_{ij} P_{i,\tau}^\dagger P_{j,\tau}, \quad (2.7)$$

unde $\tau = 0, \pm 1$ este proiectia izospinului. In cadrul QCM, sunt definite perechi colective de tip $\pi\pi$, $\nu\nu$ si $\pi\nu$

$$\Gamma_\tau^\dagger(x) \equiv \sum_{i=1}^{N_{\text{lev}}} x_i P_{\tau,i}^\dagger, \quad (2.8)$$

Un quartet colectiv este construit prin cuplajul a doua perechi colective la izospin total $T = 0$

$$Q^\dagger \equiv [\Gamma^\dagger \Gamma^\dagger]_{S=0}^{T=0} \equiv 2\Gamma_1^\dagger \Gamma_{-1}^\dagger - (\Gamma_0^\dagger)^2. \quad (2.9)$$

Starea fundamentala a Hamiltonianului (2.7) este descrisa ca un condensat de astfel de quarteti

$$|\Psi_q(x)\rangle = (Q^\dagger)^q |0\rangle, \quad (2.10)$$

unde q este numarul de quarteti. Amplitudinile de amestec x_i definesc structura starii, ele fiind determinate numeric prin minimizarea valorii medii a Hamiltonianului cu constrangerea de norma unitate.

In analogie cu cazul de pairing, in loc sa exprimam starea de condensat de quarteti in termeni de vidul $|0\rangle$ vacuum, putem sa gasim o forma echivalenta in termeni de starea Hartree-Fock, in acest caz data de

$$|\text{HF}\rangle = \left(\prod_{i=1}^q P_{1,i}^\dagger P_{-1,i}^\dagger \right) |0\rangle . \quad (2.11)$$

Perechile colective pot fi descompuse in componente dedesubtul si deasupra nivelului Fermi

$$\Gamma_\tau^\dagger(x) = \sum_{i=1}^q x_i P_{\tau,i}^\dagger + \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} x_i P_{\tau,i}^\dagger \equiv \Gamma_{\tau,h}^\dagger(x) + \Gamma_{\tau,p}^\dagger(x) . \quad (2.12)$$

In consecinta, quartetul colectiv se descompune ca

$$\begin{aligned} Q^\dagger(x) &= 2\Gamma_1^\dagger\Gamma_{-1}^\dagger - (\Gamma_0^\dagger)^2 \\ &= 2\Gamma_{1,h}^\dagger\Gamma_{-1,h}^\dagger - (\Gamma_{0,h}^\dagger)^2 + 2\Gamma_{1,p}^\dagger\Gamma_{-1,p}^\dagger - (\Gamma_{0,p}^\dagger)^2 \\ &\quad + 2 \left(\Gamma_{1,p}^\dagger\Gamma_{-1,h}^\dagger + \Gamma_{-1,p}^\dagger\Gamma_{1,h}^\dagger - \Gamma_{0,p}^\dagger\Gamma_{0,h}^\dagger \right) \\ &\equiv Q_h^\dagger(x) + Q_p^\dagger(x) + 2 \left[\Gamma_p^\dagger(x)\Gamma_h^\dagger(x) \right] . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Un calcul similar cu cel din cazul corelatiilor de pairing, ce consta in evaluarea efectelor perechilor colective de argumente inverse $1/x$, duce la expresia condensatului de quarteti sub forma de excitatii particula-gol fata de starea Hartree-Fock

$$\begin{aligned} |\Psi_q\rangle &= 2^q q! \Pi_2 \sum_{a=0}^q \sum_{b=0}^q \lambda_{ab} \left(Q_p^\dagger(x) Q_h \left(\frac{1}{x} \right) \right)^a \\ &\quad \times \left[\Gamma_p^\dagger(x) \Gamma_h \left(\frac{1}{x} \right) \right]^b |\text{HF}\rangle , \end{aligned} \quad (2.14)$$

unde

$$\begin{aligned} \lambda_{ab} &= \frac{1}{2^a b!} \sum_{r=\text{Max}(0, N_{ab}-q)}^a \frac{(q - N_{ab})_{a-r}}{2^r (a-r)! (r!)^2} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + q - r\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + N_{ab} - r\right)} , \end{aligned} \quad (2.15)$$

si $\Pi_2 = x_1^2 x_2^2 \cdots x_q^2$. In formula precedenta $N_{ab} = 2a + b$ este numarul de perechi din fiecare termen, $\Gamma(z)$ este functia Gamma iar $(z)_k = z(z-1)\cdots(z-k)$ este simbolul Pochhammer. De asemenea, folosim notatia

$$\left[\Gamma_p^\dagger(x) \Gamma_h \left(\frac{1}{x} \right) \right] \equiv \sum_{\tau=\pm 1, 0} \Gamma_{\tau,p}^\dagger(x) \Gamma_{\tau,h} \left(\frac{1}{x} \right) . \quad (2.16)$$

Cu notatia $|\Psi_q\rangle = \Pi_2 \mathcal{O}_q |\text{HF}\rangle$, cateva expresii particulare pentru \mathcal{O}_q sunt

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &= 2 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] + \frac{1}{3} (Q_p^\dagger Q_h) + 3 \\
\mathcal{O}_2 &= 4 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h]^2 + 20 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] + \frac{1}{30} (Q_p^\dagger Q_h)^2 + \frac{4}{5} [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] (Q_p^\dagger Q_h) + 2 (Q_p^\dagger Q_h) + 30 \\
\mathcal{O}_3 &= 8 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h]^3 + 84 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h]^2 + 420 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] + \frac{1}{630} (Q_p^\dagger Q_h)^3 + \frac{3}{35} [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] (Q_p^\dagger Q_h)^2 \\
&\quad - \frac{99}{70} (Q_p^\dagger Q_h)^2 + \frac{12}{7} [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h]^2 (Q_p^\dagger Q_h) + 12 [\Gamma_p^\dagger \Gamma_h] (Q_p^\dagger Q_h) + 114 (Q_p^\dagger Q_h) + 630 .
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Expresiile pentru \mathcal{O}_1 si \mathcal{O}_2 au fost de asemenea construite termen cu termen cu ajutorul pachetului software simbolic Cadabra 2 [51, 52, 53].

Expresiile din ecuatiile (2.6) si (2.14)-(2.15) sunt punctul de plecare pentru tratamentul bozonic al corelatiilor de pairing si quarteting. Ca prim pas, pentru exprimarea Hamiltonianului in termeni de grade de libertate de particula-gol, introducem indici de particula (i, j, k, \dots) si de gol (a, b, c, \dots). Pentru subspatiul de goluri, notam operatorul de creare de perechi $\tilde{P}_a^\dagger \equiv P_a$. Descompunerea Hamiltonianului de pairing al ecuatiei (2.1) in componente de particule si goluri este

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{a=1}^{n_p} (2\epsilon_a + V_{aa}) + \sum_{a=1}^{n_p} (-\epsilon_a - V_{aa}) \tilde{N}_a + \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} \epsilon_i N_i \\
&\quad + \sum_{a,b=1}^{n_p} V_{ab} \tilde{P}_a^\dagger \tilde{P}_b + \sum_{i,j=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} V_{ij} P_i^\dagger P_j + \sum_{a=1}^{n_p} \sum_{j=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} V_{ai} \left(\tilde{P}_a P_i + P_i^\dagger \tilde{P}_a^\dagger \right) .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

unde operatorul numar de goluri este $\tilde{N}_a = 2 - N_a$. Pentru cazul de pairing izovector, introducem in mod similar operatorii de perechi de goluri pentru fiecare proiectie de izospin, $\tilde{P}_{\tau,a}^\dagger \equiv P_{\tau,a}$, precum si operatorul corespunzator numarului total de goluri $\tilde{N}_{0,a} = 4 - N_{0,a}$. Astfel, Hamiltonianul ecuatiei (2.7) se descompune ca

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{a=1}^q (4\epsilon_a + 3V_{aa}) + \sum_{a=1}^q (-\epsilon_a - \frac{3}{2}V_{aa}) \tilde{N}_{0,a} + \sum_{i=q+1}^{N_{\text{lev}}} \epsilon_i N_{0,i} \\
&\quad + \sum_{a,b=1}^q V_{ab} \sum_{\tau=\pm 1,0} \tilde{P}_{\tau,a}^\dagger \tilde{P}_{\tau,b} + \sum_{i,j=q+1}^{N_{\text{lev}}} V_{ij} \sum_{\tau=\pm 1,0} P_{\tau,i}^\dagger P_{\tau,j} \\
&\quad + \sum_{a=1}^q \sum_{j=q+1}^{N_{\text{lev}}} V_{ai} \sum_{\tau=\pm 1,0} \left(\tilde{P}_{\tau,a} P_{\tau,i} + P_{\tau,i}^\dagger \tilde{P}_{\tau,a}^\dagger \right) .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

In cadrul aproximatiei bozonice, definim corespondenta de la operatorii de pereche la operatori bozonici

$$P_i^\dagger \rightarrow p_i^\dagger, \quad \tilde{P}_a^\dagger \rightarrow h_a^\dagger, \quad |\text{HF}\rangle \rightarrow |0\rangle . \tag{2.20}$$

unde $p_i|0\rangle = 0$ and $h_a|0\rangle = 0$, impreuna cu corespondenta $\tilde{N}_a \rightarrow \mathcal{N}_a$, $N_i \rightarrow \mathcal{N}_i$, unde

$\mathcal{N}_i|0\rangle = 0$ si $\mathcal{N}_a|0\rangle = 0$. Acesti operatori formeaza o algebra bozonica,

$$\begin{aligned} [p_i, p_j^\dagger] &= \delta_{ij}\pi_j, [h_a, h_b^\dagger] = \delta_{ab}\eta_b, [p_i, h_j^\dagger] = 0, \\ [\mathcal{N}_i, p_j^\dagger] &= 2\delta_{ij}p_j^\dagger, [\mathcal{N}_a, h_b^\dagger] = 2\delta_{ab}h_b^\dagger \end{aligned} \quad (2.21)$$

unde coeficientii π_i si η_j sunt scalari. In continuare, definim operatorii bozonici colectivi

$$\mathcal{H}^\dagger(y) \equiv \sum_{a=1}^{n_p} y_a h_a^\dagger, \quad \mathcal{P}^\dagger(x) \equiv \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} x_i p_i^\dagger. \quad (2.22)$$

cu ajutorul carora construim o stare de proba bozonica structural identica cu cea a condensatului PBCS fermionic

$$|\psi(x, y)\rangle \equiv \sqrt{\chi} \sum_{n=0}^{n_p} \frac{1}{(n!)^2} (\mathcal{P}^\dagger(x) \mathcal{H}^\dagger(y))^n |0\rangle, \quad (2.23)$$

unde χ este o constanta de normare. Media Hamiltonianului pe starea de proba, in cazul bozonic, poate fi gasita analitic ca

$$\begin{aligned} \langle H_b \rangle &= (\mathcal{H}_{hh} S_p + \mathcal{H}_{pp} S_h) \cdot f_1(S_{ph}) + \mathcal{H}_{ph} \cdot f_2(S_{ph}) + E_0 \cdot \nu(S_{ph}), \\ \mathcal{H}_{hh} &= \sum_{a=1}^{n_p} 2\tilde{\epsilon}_a \eta_a y_a^2 + \sum_{a,b=1}^{n_p} V_{ab} y_a \eta_a y_b \eta_b, \\ \mathcal{H}_{pp} &= \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} 2\epsilon_i \pi_i x_i^2 + \sum_{i,j=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} V_{ij} x_i \pi_i x_j \pi_j, \\ \mathcal{H}_{ph} &= 2 \sum_{a=1}^{n_p} \sum_{j=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} V_{aj} x_j \pi_j y_a \eta_a, \end{aligned} \quad (2.24)$$

in termeni de factorii de forma

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{n_p} \frac{n z^{n-1}}{(n!)^2}, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{n_p-1} \frac{z^n}{(n!)^2}, \quad \nu(z) = \sum_{n=0}^{n_p} \frac{(z)^n}{(n!)^2} \quad (2.25)$$

si energia $E_0 = \sum_{a=1}^{n_p} (2\epsilon_a + V_{aa})$, unde $S_p = \sum_{i=n_p+1}^{N_{\text{lev}}} x_i^2 \pi_i$, $S_h = \sum_{a=1}^{n_p} y_a^2 \eta_a$, $S_{ph} = S_p S_h$.

Energia starii fundamentale corespunde minimului functiei

$$E(x, y) \equiv \frac{\langle \psi(x, y) | H_b | \psi(x, y) \rangle}{\langle \psi(x, y) | \psi(x, y) \rangle}, \quad (2.26)$$

si poate fi calculata numeric prin minimizarea fata de amplitudinile de particula si gol x_i si y_a . Consideram doua alegeri pentru coeficientii comutatorilor din ecuatiile (2.21), si anume

1. cazul bozonic pur: $\eta_a = 1$, $\pi_i = 1$.
2. cazul bozonic renormalizat:

$$\begin{aligned} \eta_a &= 1 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{N}_a \rangle = 1 - y_a^2 \eta_a S_p f_1(S_{ph}) / \nu(S_{ph}) \\ \pi_i &= 1 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{N}_i \rangle = 1 - x_i^2 \pi_i S_h f_1(S_{ph}) / \nu(S_{ph}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Este de preferat o procedura de renormalizare pentru a lua in considerare in mod efectiv ocuparea maxima finita a unui nivel in acord cu principiul Pauli.

Aceeasi idee de baza este aplicabila si in cazul de pairing izovector. Introducem corespondenta de la fiecare operator de pereche de proiectie a izospinului data la un operator bozonic

$$P_{\tau,i}^\dagger \rightarrow p_{\tau,i}^\dagger, \quad \tilde{P}_{\tau,a}^\dagger \rightarrow h_{\tau,a}^\dagger. \quad (2.28)$$

Consideram aproximatia de independenta a perechilor bozonice de proiectii diferite ale izospinului:

$$\left[p_{\tau,i}^\dagger, p_{\sigma,j}^\dagger \right] = \delta_{\tau\sigma} \delta_{ij} \pi_j, \quad \left[h_{\tau,a}^\dagger, h_{\sigma,b}^\dagger \right] = \delta_{\tau\sigma} \delta_{ab} \eta_b \quad (2.29)$$

Aceasta alegere permite un tratament simplu al corelatiilor de pairing izovector, inasa este de mentionat ca sunt neglijate efectele de overlap ale perechii proton-neutron cu perechile de aceeasi specie, luate in considerare in formalismul fermionic original prin comutatorii $\left[P_{0,i}, P_{\pm 1,j}^\dagger \right] = \pm \delta_{ij} T_{\pm 1,i}$, unde operatorii de izospin sunt

$$T_{\tau,i} = \left[c_i^\dagger c_i \right]_{M=0,\tau}^{J=0,T=1}.$$

In cadrul acestei aproximatii, media Hamiltonianului izovector pe versiunea bozonică a starii de proba de quartet poate fi exprimata intr-o forma similara cu cea din cazul de pairing standard. Ca si in cazul PBCS, consideram ambele alegeri de relatii de comutare bozonice, cele pure si cele renormalizate.

Rezultate si perspective

Am analizat cazurile PBCS pentru numerele de perechi $n_p = 6$ si $n_p = 10$, precum si QCM pentru numerele de quarteti $q = 1, 2, 3, 4$, pentru un model de 20 de nivele dublu degenerate echidistante, $\epsilon_k = (k - 1)$ MeV, doubly-degenerate single particle levels, cu o interactie de pairing constanta, $V_{ij} = -G$. Cazul bozonic pur, corespunzator la $\eta_a = 1, \pi_i = 1$, va fi indicat prin "bPBCS" si "bQCM", pe cand versiunile renormalizate prin "rbPBCS" si "rbQCM".

Taria interactiei de pairing G este raportata la taria critica G_{cr} pentru care gap-ul de pairing se anuleaza pentru abordarile BCS si BCS proton-neutronic [57, 58, 59], pentru a putea distinge intre regimurile de pairing slab, mediu si intens corespunzand la $G < G_{\text{cr}}$, $G \sim G_{\text{cr}}$ si $G > G_{\text{cr}}$.

In toate cazurile, gasim un acord excelent intre cazul fermionic si ambele aproximari bozonice in regimul de pairing slab. Insa, odata cu cresterea tarii interactiei de pairing, aproximatia bozonică pura se dovedeste inadecvata din cauza ca efectele

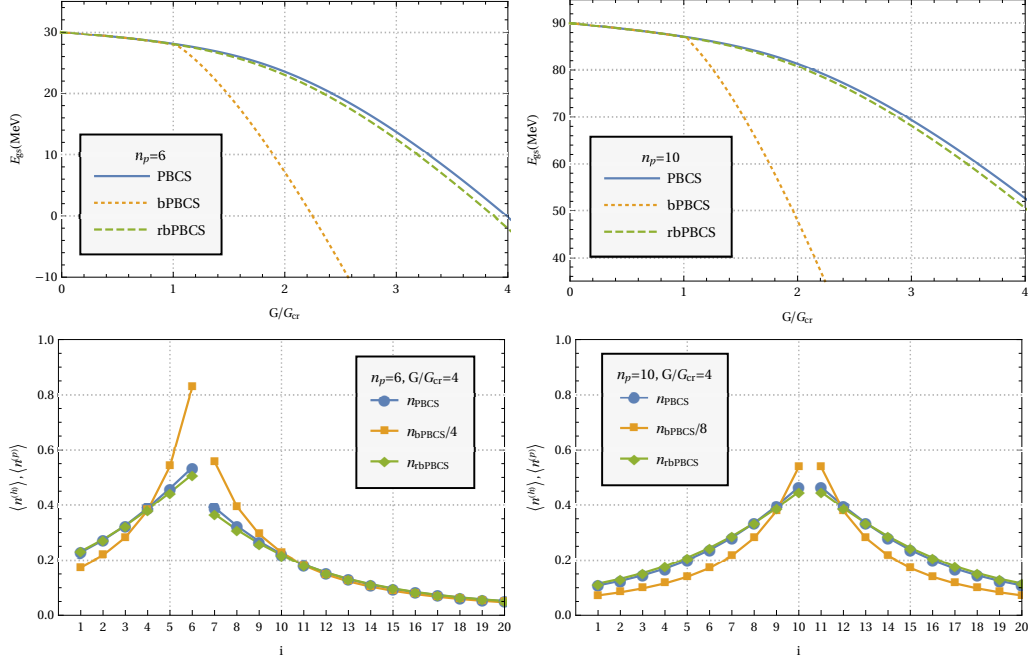


Figura 3.1: Energia stării fundamentale (in MeV) versus raportul G/G_{cr} pentru $n_p = 6$ (a) și $n_p = 10$ (b) și ocupările medii versus numărul stării pentru $n_p = 6$ (c) și $n_p = 10$ (d) pentru abordările PBCS, bPBCS și rbPBCS, pentru $G/G_{cr} = 4$.

principiului Pauli nu sunt considerate. Pe de altă parte, aceste probleme sunt rezolvate în cadrul abordării bozonice renormalizate. Găsim rezultate foarte bune atât pentru pairing cât și pentru quarteting, atât în ceea ce privește energi stării fundamentale, cât și ocupările medii ale nivelelor.

În concluzie, am găsit că reformularea în termeni de excitații particula-gol a condensatelor de perechi și quarteti conține o cantitate semnificativă de informație despre corelațiile fermionice din starea fundamentală, ceea ce permite o bună descriere a proprietăților stării fundamentale în termeni de grade de libertate bozonice (cu mențiunea că efectele principiului Pauli de excludere să fie luate în considerare prin procedura de renormalizare).

Pe tematica prezentată mai sus au fost publicat articolele “Unified description of pairing and quarteting correlations within the particle-hole-boson approach”, Physical Review C 99, 064311, 7 Iunie 2019, autori V.V. Baran și D. S. Delion, precum și “Disentangling the pair and quartet condensates”, Physical Review C 100, 034326, 30 Septembrie 2019, autori V.V. Baran, D. S. Delion și S. Dolteanu. Rezultatele au fost prezentate în cadrul Workshop-ului internațional “Light clusters in nuclei and nuclear Matter”, Trento, Italia, Septembrie 2019.

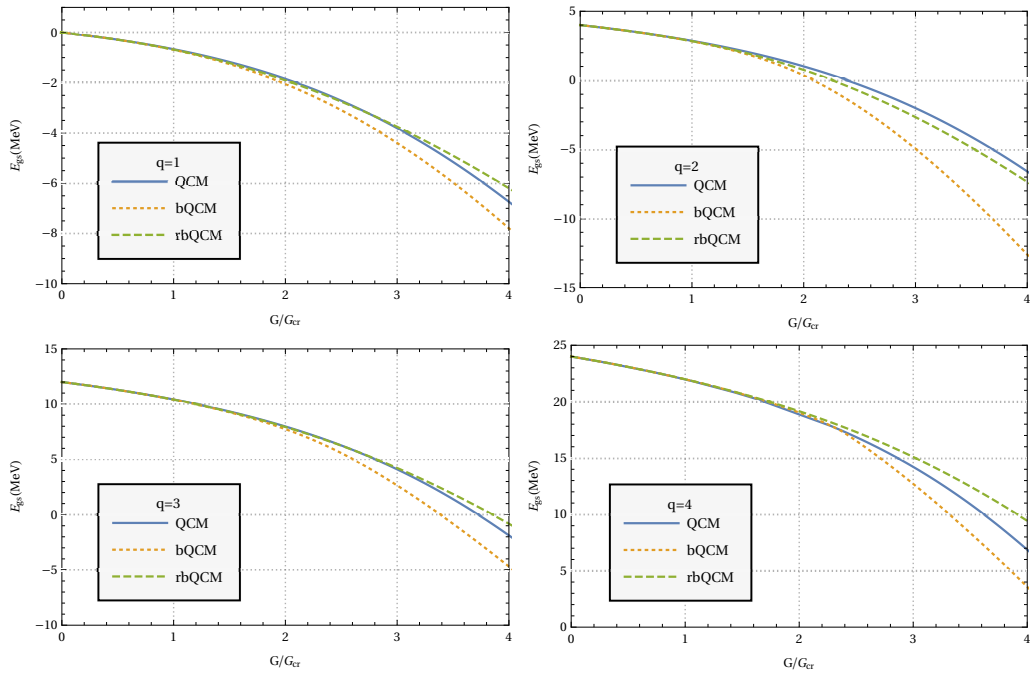


Figura 3.2: Energia stării fundamentale (in MeV) versus raportul G/G_{cr} pentru $q = 1$ (a), $q = 2$ (b), $q = 3$ (c), $q = 4$ (d) pentru abordările QCM, bQCM și rbQCM.

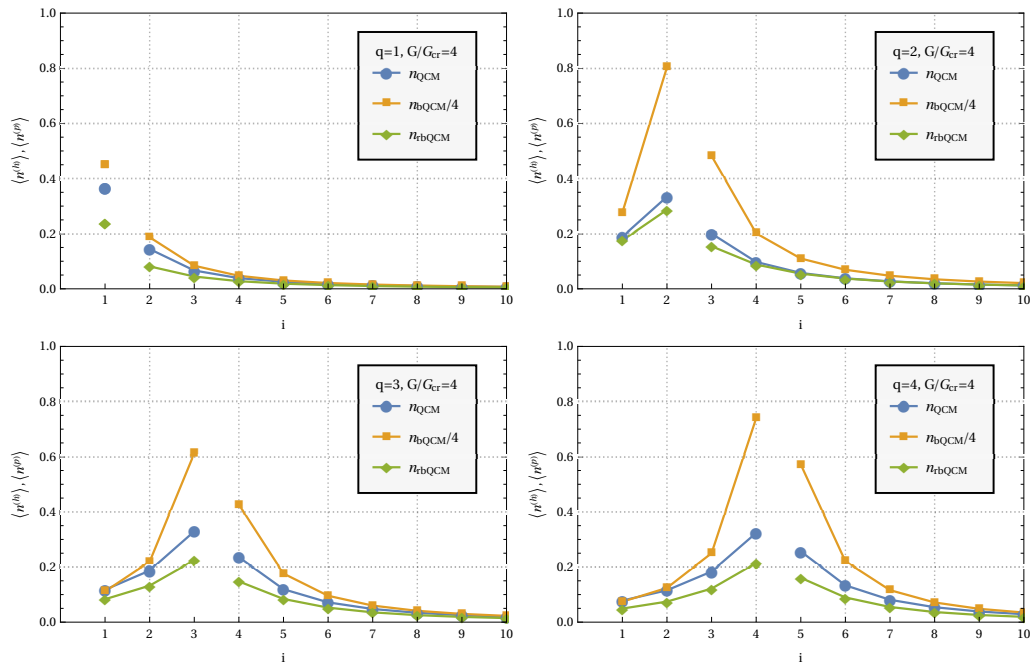


Figura 3.3: Ocupările medii versus numărul stării, pentru $q = 1$ (a), $q = 2$ (b), $q = 3$ (c) și $q = 4$ (d), la $G/G_{cr} = 4$.

Bibliografie

- [1] L.R. Hafstad and E. Teller, The alpha-particle model of the nucleus, *Phys. Rev.* **54**, 681 (1938).
- [2] K. Ikeda, N. Tagikawa, and H. Horiuchi, The Systematic Structure-Change into the Molecule-like Structures in the Self-Conjugate $4n$ Nuclei, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **E68** 464 (1968).
- [3] B.H. Flowers and M. Vujcic, Charge-independent pairing correlations, *Nucl. Phys.* **49**, 586 (1963).
- [4] D.M. Brink, Alpha cluster model, *Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Varenna Course* **36**, 247 (1966).
- [5] A. Arima and V. Gillet, The roton model of quartets in nuclei, *Ann. Phys.* **66**, 117 (1971).
- [6] K. Wildermuth and Y.C. Tang, *A Unified Theory of the Nucleus* (Academic, New York, 1977).
- [7] M. Freer, and A.C. Merchant, Developments in the study of nuclear clustering in light even-even nuclei, *J. Phys.* **G** 23, 261 (1997).
- [8] D.S. Delion, G.G. Dussel, and R.J. Liotta, Towards a microscopic description of an α -condensate in nuclei, *Rom. J. Phys.* **47**, 97 (2002).
- [9] H. Horiuchi, Cluster structure in nuclei, *Nucl. Phys. A* **731**, 329 (2004).
- [10] Y. Funaki, H. Horiuchi, W. von Oertzen, G. Röpke, P. Schuck, A. Tohsaki, and T. Yamada, Concepts of nuclear α -particle condensation, *Phys. Rev. C* **80**, 064326 (2009).
- [11] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, and G. Röpke, Colloquium: Status of α -particle condensate structure of the Hoyle state, *Rev. Mod. Phys.* **89**, 011002 (2017).
- [12] Y.K. Gambhir, P. Ring, and P. Schuck, Nuclei: A Superfluid Condensate of α -Particles? A Study within the Interacting-Boson Model, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1235 (1983).
- [13] D.S. Delion, *Theory of particle and cluster emission* (Springer-Verlag, Berlin, 2010).

- [14] K. Varga, R.G. Lovas, and R.J. Liotta, Absolute alpha decay width of ^{212}Po in a combined shell and cluster model, Phys. Rev. Lett. **69**, 37 (1992); Cluster-configuration shell model for alpha decay, Nucl. Phys. **550**, 421 (1992).
- [15] D.S. Delion, A. Sandulescu, and W. Greiner, Evidence for alpha-clustering in heavy and superheavy nuclei, Phys. Rev. C **69**, 044318 (2004).
- [16] G. Röpke, A. Schnell, P. Schuck, and P. Nozieres, Four-particle condensate in strongly coupled fermion systems, Phys. Rev. Lett. **80**, 3177 (1998).
- [17] D.S. Delion and R.J. Liotta, Shell-model representation to describe alpha emission, Phys. Rev. C **87**, 041302(R) (2013).
- [18] A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, G. Röpke, Alpha Cluster Condensation in ^{12}C and ^{16}O , Phys. Rev. Lett. **87** 192501 (2001)
- [19] P. Schuck, Y. Funaki, H. Horiuchi, G. Röpke, A. Tohsaki, T. Yamada, Alpha particle clusters and their condensation in nuclear systems, Phys. Scr. **91** 123001 (2016)
- [20] M. Matsumura, Y. Suzuki, A microscopic analysis of the amount of α -condensation in ^{12}C , Nucl. Phys. A 739 238 (2004).
- [21] T. Yamada, P. Schuck, Single α -particle orbits and Bose-Einstein condensation in ^{12}C , Eur. Phys. J. A 26 185 (2005).
- [22] R. Lazauskas, M. Dufour, Description of 3α -bosonic states in the ^{12}C nucleus with local and nonlocal potentials, Phys. Rev. C **84** 064318 (2011).
- [23] S. Ishikawa, Decay and structure of the Hoyle state, Phys. Rev. C **90** 061604(R) (2014).
- [24] N. Sandulescu, D. Negrea, J. Dukelsky, C. W. Johnson, Quartet condensation and isovector pairing correlations in $N = Z$ nuclei, Phys. Rev. C **85**, 061303(R) (2012).
- [25] D. Negrea, *Proton-neutron correlations in atomic nuclei*, Ph.D. thesis, University of Bucharest and University Paris-Sud, 2013, <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00870588/document>.
- [26] N. Sandulescu, D. Negrea, C. W. Johnson, Four-nucleon α -type correlations and proton-neutron pairing away from the $N = Z$ line, Phys. Rev. C **86**, 041302(R) (2012).
- [27] D. Negrea, N. Sandulescu, Isovector proton-neutron pairing and Wigner energy in Hartree-Fock mean field calculations, Phys. Rev. C **90**, 024322 (2014).
- [28] N. Sandulescu, D. Negrea, J. Dukelsky, C. W. Johnson, Proton-neutron pairing and alpha-type quartet condensation in nuclei, J. Phys.: Conf. Ser. **533**, 012018 (2014).
- [29] N. Sandulescu, D. Negrea, D. Gambacurta, Proton-neutron pairing in $N = Z$ nuclei: Quartetting versus pair condensation, Phys. Lett. B, **751**, 348 (2015).

- [30] D. Negrea, N. Sandulescu, D. Gambacurta, Isovector and isoscalar pairing in odd-odd $N = Z$ nuclei within a quartet approach, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, Vol. 2017, Issue 7, 073D05 (2017).
- [31] D. Negrea, P. Baganu, D. Gambacurta, N. Sandulescu, Isovector and isoscalar proton-neutron pairing in $N > Z$ nuclei, *Phys. Rev. C* **98**, 064319 (2018).
- [32] G. J. Fu, Y. Lei, Y. M. Zhao, S. Pittel, A. Arima, Nucleon-pair approximation of the shell model with isospin symmetry, *Phys. Rev. C* **87**, 044310 (2013)
- [33] G. J. Fu, Y. M. Zhao, and A. Arima, Quartet structure in atomic nuclei, *Phys. Rev. C* **91**, 054318 (2015)
- [34] M. Sambataro, N. Sandulescu, Four-body correlations in nuclei, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 112501 (2015) .
- [35] M. Sambataro, N. Sandulescu, Quarteting and spin-aligned proton-neutron pairs in heavy $N = Z$ nuclei, *Phys. Rev. C* **91**, 064318 (2015) .
- [36] M. Sambataro, N. Sandulescu, Quartetting in odd-odd self-conjugate nuclei, *Phys. Lett. B* 763 (2016) 151.
- [37] M. Sambataro, N. Sandulescu, Quartet correlations in $N = Z$ nuclei induced by realistic two-body interactions, *Eur. Phys. J. A* 53 (2017) 47.
- [38] M. Sambataro, N. Sandulescu (unpublished); N. Sandulescu, Proton-neutron pairing and quartet correlations in nuclei, talk at the *Workshop on Recent advances on proton-neutron pairing and quartet correlations in nuclei* (Saclay, France, 2018).
- [39] J. Dukelsky, G. G. Dussel, J. C. Hirsch, P. Schuck, Comparison between exact and approximate treatments of the pairing interaction for finite Fermi systems, *Nucl. Phys. A* 714, 63 (2003).
- [40] P. A. Johnson, P. W. Ayers, P. A. Limacher, S. De Baerdemacker, D. Van Neck, and P. Bultinck, A size-consistent approach to strongly correlated systems using a generalized antisymmetrized product of nonorthogonal geminals, *Comp. Theor. Chem.* 1003, 101 (2013)
- [41] T. M. Henderson, G. E. Scuseria, J. Dukelsky, A. Signoracci, and T. Duguet, Quasiparticle coupled cluster theory for pairing interactions, *Phys. Rev. C* **89**, 054305 (2014).
- [42] Y. Qiu, T. M. Henderson, T. Duguet, and G. E. Scuseria, Particle-number projected Bogoliubov-coupled-cluster theory: Application to the pairing Hamiltonian, *Phys. Rev. C* **99**, 044301 (2019).
- [43] J. Dukelsky, S. Pittel, and C. Esebbag, Structure of the number-projected BCS wave function, *Phys. Rev. C* **93**, 034313 (2016).
- [44] L.Y. Jia, Particle-hole symmetry in generalized seniority, microscopic interacting boson (fermion) model, nucleon-pair approximation, and other models, *Phys. Rev. C* **93**, 064307 (2016).

- [45] J. Dobeš, S. Pittel, Boson mappings and four-particle correlations in algebraic neutron-proton pairing models, *Phys. Rev. C* **57**, 688 (1998)
- [46] S. Lerma H., B. Errea, J. Dukelsky, S. Pittel, P. Van Isacker, Exactly solvable models of proton and neutron interacting bosons, *Phys. Rev. C* **74**, 024314 (2006)
- [47] G. Nikoghosyan, E.A. Kolganova, R.V. Jolos, Isovector and Isoscalar Pair Correlations in Boson Representation Technique, *Bulg. J. Phys.* **44**, 443 (2017)
- [48] M. Sambataro, N. Sandulescu, Quartet structure of $N = Z$ nuclei in a boson formalism: The case of ^{28}Si , *Phys. Lett. B* **786** 11-15 (2018)
- [49] A. Klein, E. R. Marshalek, Boson realizations of Lie algebras with applications to nuclear physics, *Rev. Mod. Phys.* **63** 2 (1991)
- [50] P. Ring and P. Schuck, *The Many Body Nuclear Problem*, Springer-Verlag, Berlin 1980.
- [51] K. Peeters, Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems, hep-th/0701238.
- [52] K. Peeters, Cadabra2: computer algebra for field theory revisited, *Journal of Open Source Software*, 3(32), 1118 (2018)
- [53] <https://cadabra.science>
- [54] D. Gambacurta, M. Sambataro, and F. Catara, Solvable many-level pairing model in a boson formalism, *Phys. Rev. C* **73**, 014310 (2006).
- [55] V.V. Baran, D.S. Delion, Analytical approach for the quartet condensation model, *Phys. Rev. C* **99**, 031303(R) (2019)
- [56] J. Dukelsky, G. Sierra, Crossover from bulk to few-electron limit in ultrasmall metallic grains, *Phys. Rev. B* **61** 12302 (2000)
- [57] P. Camiz, A. Covello, M. Jean, A generalized Bogolyubov transformation and neutron-proton pairing in nuclei, *Nuovo Cimento* 36, 663 (1965)
- [58] H. T. Chen, A. Goswami, Generalized treatment of neutron-proton pairing in $N = Z$ nuclei, *Phys. Lett. B* 24, 257 (1967).
- [59] D. S. Delion, R. Wyss, R. J. Liotta, Bo Cederwall, A. Johnson, and M. Sandzelius, Investigations of proton-neutron correlations close to the drip line, *Phys. Rev. C* **82**, 024307 (2010)