Raport final de activitate - 27.11.2019

Conf. Dr. Habil. Eva Kaslik
Prof. Dr. Habil. Mihaela Neamţu

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach
Director: Prof. Univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN

INTRODUCERE. OBIECTIVE GENERALE.

Obiectivele principale pe care le-am avut în vedere sunt:

O.1 Analiza bibliografiei existente privind modelarea matematică a şomajului.

O.2 Conceperea modelelor matematice pentru descrierea somajului.

O.3 Studiul existenţei soluţiilor pozitive, a punctelor de echilibru şi a stabilităţii acestora.

O.4 Analiza fenomenelor de bifurcaţie ce apar în modelele matematice investigate.

O.5 Utilizarea unor softuri (e.g. Matematica, Maple, Matlab) pentru efectuarea simulărilor numerice în vederea verificării rezultatelor teoretice.

PLANUL DE CERCETARE

ACTIVITĂŢI REALIZATE

În etapa intermediară am realizat următoarele activităţi:

A.1 **Studiul literaturii existente** referitoare la descrierea matematică a proceselor economice ce privesc şomajul. Lucrările relevante identificate sunt: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. În plus, modele matematice bazate pe sisteme de ecuaţii diferenţiale cu întârzieri au fost studiate în [9, 10, 11, 12].

A.2 **Conceperea unui model matematic** pentru procesul amintit mai sus, utilizând un sistem de ecuaţii diferenţiale cu întarziere distribuită:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = A - [a_1 V(t) + a_2]U(t) + a_3 E(t) - b_1 U(t), \\ \dot{E}(t) = [a_1 V(t) + a_2]U(t) - a_3 E(t) - b_2 E(t), \\ \dot{V}(t) = a_4 \int_0^\infty k(s) U(t-s) ds - b_3 V(t), \end{cases} \tag{1}$$

În acest model, se presupune că numaul şomerilor $U(t)$ creşte continuu cu o rată constantă A. Guvernul şi sectorul privat crează un număr de noi locuri de muncă $V(t)$ care este proporţional cu numărul şomerilor. În plus, se presupune că dacă o persoană este disponibilizată sau îşi părăseşte locul de muncă, ea este transferată din clasa angajaţilor $E(t)$ în clasa şomerilor. Parametri constanţi ce apar în model sunt pozitivi si au semnificaţii caracteristice procesului modelat. Utilizarea întârzierii distributite este mai riguroasă în modelarea fenomenelor în care estimarea întârzierilor care apar este dificilă sau inexactă.

A.3 **Determinarea punctului de echilibru pozitiv** pentru modelul matematic construit.

Propoziţia 1. *Notând* $\alpha = \frac{a_1 a_4 b_2}{b_3(a_3+b_2)}$, $\beta = \frac{a_2+b_2}{a_3+b_2} + b_1$, *şi cu* U_0 *unica soluţie pozitivă a ecuaţiei*

$$\alpha U^2 + \beta U - A = 0,$$

sistemul (1) *are un unic punct de echilibru pozitiv:*

$$S^+ := (U_0, E_0, V_0) = \left(U_0, \frac{U_0(a_1 a_4 U_0 + a_2 b_3)}{b_3(a_3+b_2)}, \frac{a_4 U_0}{b_3} \right).$$

A.4 **Studiul existenţei soluţiilor pozitive** în cazul modelului matematic (1). Mai precis, am investigat condiţii suficiente în termeni de parametri sistemului care garantează pozitivitatea soluţiilor pentru condiţii iniţiale pozitive. În acest sens, am demonstrat următoarea teoremă:

Teorema 2. *Notând* $\delta = min(b_1, b_2)$, *mulţimea*

$$\Omega = \{(U,E,V) : 0 \leq U + E \leq \frac{A}{\delta},\ 0 \leq V \leq \frac{a_4 A}{\delta b_3}\},$$

este o regiune de atracţie pentru sistemul (1) *pentru toate soluţiile cu condiţii iniţiale din primul octant al spaţiului* $\mathbb{R}^3$.

A.5 **Studiul stabilităţii echilibrului** sistemului (1). În cazul în care întârzierea distribuită lipseşte, adică sistemul (1) devine un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare, utilizând criteriul Routh-Hurwitz, am demonstrat că echilibrul S_+ este local asimptotic stabil. În plus, utilizând Teorema lui Rouché, am obţinut criterii suficiente, independente de întârzierea distribuită considerată, pentru stabilitatea asimptotică a echilibrului S_+ al sistemului (1).

În etapa finală, am continuat studiul întreprins în etapa intermediară, prin următoarele activităţi:

A.6 **Adimensionalizarea modelului**: prin schimbările de variabile

$$x(t) = \frac{a_1 a_4}{a_3^2} U\left(\frac{t}{a_3}\right), \quad y(t) = \frac{a_1 a_4}{a_3^2} E\left(\frac{t}{a_3}\right), \quad z(t) = \frac{a_1}{a_3} V\left(\frac{t}{a_3}\right), \tag{2}$$

obţinem următorul model adimensional

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \gamma - [z(t)+\alpha]x(t) + y(t) - \beta_1 x(t), \\ \dot{y}(t) = [z(t)+\alpha]x(t) - y(t) - \beta_2 y(t), \\ \dot{z}(t) = \int\limits_0^\infty \hat{k}(s)x(t-s)ds - \beta_3 z(t), \end{cases} \tag{3}$$

unde coeficienţii sunt daţi de

$$\gamma = \frac{a_1 a_4 A}{a_3^3}, \quad \alpha = \frac{a_2}{a_3} \ , \ \beta_1 = \frac{b_1}{a_3} \ , \ \beta_2 = \frac{b_2}{a_3} \ , \ \beta_3 = \frac{b_3}{a_3}$$

şi nucleul de întârziere este $\hat{k}(s) = \frac{1}{a_3} k(\frac{s}{a_3})$ cu valoarea medie $\hat{\tau} = a_3 \tau$.

Condiţii iniţiale asociate sistemului (3) sunt

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad y(\theta) = \psi(\theta), \quad z(\theta) = \xi(\theta), \quad \forall\ \theta \in (-\infty, 0],$$

unde φ, ψ, ξ aparţin spaţiului Banach $C_{0,\mu}(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ (unde $\mu > 0$) a funcţiilor reale continue definite pe $(-\infty, 0]$ cu $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{\mu t} \varphi(t) = 0$, considerat în raport cu norma:

$$\|\varphi\|_{\infty,\mu} = \sup_{t \in (-\infty, 0]} e^{\mu t} |\varphi(t)|.$$

Sistemul (3) are un unic punct de echilibru pozitiv:

$$S^+ := (x_0, y_0, z_0) = \left(\beta_3 z_0, \frac{\beta_3 z_0(z_0+\alpha)}{\beta_2+1}, z_0\right),$$

unde z_0 este unica rădăcină a ecuaţiei:

$$\beta_2 z^2 + (\beta_1 + \alpha\beta_2 + \beta_1\beta_2)z - \frac{\gamma}{\beta_3}(1+\beta_2) = 0. \tag{4}$$

A.7 **Pozitivitatea şi mărginirea soluţiilor** este dată de următoarea teoremă:

Teorema 3. *Octantul pozitiv deschis al spaţiului* $\mathbb{R}^3$ *este invariant la fluxul sistemului* (3)*. Mai mult, mulţimea*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq \frac{\gamma}{\beta_m},\ 0 \leq z \leq \frac{\gamma}{\beta_m\beta_3}\right\},$$

unde $\beta_m = \min(\beta_1, \beta_2)$ *este o regiune de atracţie a sistemului* (3) *şi atrage toate soluţiile care pornesc din condiţii înitiale din octantul pozitiv deschis al spaţiului* $\mathbb{R}^3$*.*

A.8 **Investigarea bifurcaţiilor de tip Hopf şi a altor tipuri de bifurcaţii ce apar în vecinătatea echilibrelor acestor sisteme.** Am demonstrat că in modelele considerate nu pot apărea fenomene de bifurcaţie, obţinând următoarele rezultate:

Teorema 4. *Echilibrul pozitiv* S^+ *al sistemului (3) este local asimptotic stabil pentru orice nucleu de întârziere* $\hat{k}(s)$*.*

În plus, am demonstrat stabilitatea asimptotică globală a echilibrului pozitiv, găsind o condiţie simplă asupra parametrilor modelului, după cum urmează:

Teorema 5. *Dacă următoarea inegalitate are loc:*

$$z_0 \leq \min\{\beta_1, \alpha\beta_2\} \tag{5}$$

echilibrul pozitiv S^+ *al sistemului (3) este global asimptotic stabil pentru orice nucleu de întârziere* $\hat{k}(s)$*.*

Demonstraţia teoremei se bazează pe construcţia următoarei funcţii Lyapunov:

$$L(t) = L_1(t) + L_2(t) \tag{6}$$

unde

$$\begin{aligned} L_1(t) &= x_0 H\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) + \frac{\alpha}{u_0} y_0 H\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) + z_0(z_0+\alpha) H\left(\frac{z(t)+\alpha}{z_0+\alpha}\right) \\ L_2(t) &= x_0 z_0 \int_0^\infty \left(\hat{k}(s)\int_{t-s}^t H\left(\frac{x(r)}{x_0}\right) dr\right) ds \end{aligned}$$

unde $H : (0,\infty) \to [0,\infty)$ este dată de $H(x) = x - 1 - \ln(x)$.

A.9 **Realizarea unor simulări numerice** pentru validarea rezultatelor teoretice obţinute.

A.10 **Interpretarea rezultatelor** obţinute din perspectiva fenomenului economic modelat şi **comparaţia rezultatelor** obţinute cu rezultate furnizate de modele mai simple, şi investigarea influenţei intârzierilor distribuite în analiza calitativă şi cantitativă a acestor sisteme.

DISEMINARE. PUBLICAŢII

Activităţile realizate pentru îndeplinirea obiectivelor acestui proiect s-au concretizat prin redactarea în formă finală a următoarelor lucrări ştiinţifice (anexate):

1. E. Kaslik, M. Neamţu, L.F. Vesa. ”Global stability analysis of an unemployment model with distributed delay” - lucrare trimisă la un jurnal indexat ISI.
2. E. Kaslik, M. Neamţu, L.F. Vesa. ”An unemployment model with time delay” - lucrare trimisă spre publicare, Analele AOSR.

BIBLIOGRAFIE

[1] Veronika Novotná. Application of delay differential equations in the model of the relationship between unemployment and inflation. *Trends Economics and Management*, 6(10):77–82, 2013.

[2] A.K. Misra, Arvind K. Singh, and Pushkar Kumar Singh. Modeling the role of skill development to control unemployment. *Differential Equations and Dynamical Systems*, pages 1–13, 2017.

[3] Anibal Galindro and Delfim F.M. Torres. A simple mathematical model for unemployment: a case study in portugal with optimal control. *arXiv preprint arXiv:1801.00058*, 2017.

[4] S.B. Munoli, S.R. Gani, and S.R. Gani. A mathematical approach to employment policies: An optimal control analysis. *International Journal of Statistics and Systems*, 12(3):549–565, 2017.

[5] L. Harding and M. Neamţu. A dynamic model of unemployment with migration and delayed policy intervention. *Computational Economics*, 51(3):427–462, 2018.

[6] U.K. Mallick and Md.H.A. Biswas. Optimal analysis of unemployment model taking policies to control. *Advanced Modeling and Optimization*, 20(1):303–312, 2018.

[7] G.N. Pathan and P.H. Bhathawala. A mathematical model for unemployment control-an analysis with and without delay. *International Journal of Mathematics And Applications*, 55:7, 2018.

[8] Raneah M. Al-Maalwi, H.A. Ashi, and Sarah Al-sheikh. Unemployment model. *Applied Mathematical Sciences*, 12(21):989–1006, 2018.

[9] Stéphane Hallegatte, Michael Ghil, Patrice Dumas, and Jean-Charles Hourcade. Business cycles, bifurcations and chaos in a neo-classical model with investment dynamics. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 67(1):57–77, 2008.

[10] Akio Matsumoto and Ferenc Szidarovszky. Delay differential nonlinear economic models. In *Nonlinear dynamics in economics, finance and social sciences*, pages 195–214. Springer, 2010.

[11] Akio Matsumoto and Ferenc Szidarovszky. Delay differential neoclassical growth model. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 78(3):272–289, 2011.

[12] Jinchen Yu and Mingshu Peng. Stability and bifurcation analysis for the Kaldor-Kalecki model with a discrete delay and a distributed delay. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 460:66–75, 2016.

Data: 27.11.2019 | Conf. Dr. Habil. Eva Kaslik | Prof. Dr. Habil. Mihaela Neamţu