RAPORT FINAL

asupra studiului complet al temei

PROIECTUL DE CERCETARE: *"Aplicaţii ale analizei matematice în teoria numerelor, optimizare, ecuaţii diferenţiale, alte domenii de cercetare matematică sau multidisciplinară"*

COORDONATOR: Prof. Dan Tiba

RAPORTOR: Radu Budaca

Obiectivul 1: *Studiul proprietăţilor spectrale ale soluţiei Hamiltonianului Bohr pentru un potenţial sextic general având două minime de adâncimi diferite.*

- Determinarea condiţiilor pentru care potenţialul sextic efectiv al unui Hamiltonian Bohr 5-dimensional realizează două minime degenerate în energie.
- Realizarea unei analize a prorpietăţilor spectrale, electromagnetice, precum şi de tunelare de-a lungul căii alese din spaţiul parametrilor.
- Identificarea cazurilor unde se realizează o coexistenţă a formelor în starea fundamentală.
- Aplicarea formalismului la izotopi cu posibilă coexistenţă a formelor.

Proprietăţile macroscopice ale nucleelor atomice sunt de regulă descrise cu ajutorul unor modele colective. În particular, modelul Bohr-Mottelson [1] oferă o imagine fenomenologică consistentă printr-o descriere cuantică completă a fluctuaţiilor suprafeţei nucleare. Premisa acestui model este folosirea unor variabile geometrice asociate formei nucleare. Pentru cazul deformării cvadrupolare, se folosesc două variable de formă, care împreună cu cele trei unghiuri Euler ce descriu rotaţiile nucleare, formează un spaţiu al fazelor de dimensiunea cinci. Hamiltonianul Bohr general asociat este construit ca suma unui operator cinetic cu o masă efectivă tensorială, definit în acord cu principiul de cuantificare Pauli-Podolski [2], şi un potenţial dependent doar de variabilele de formă. Diagonalizarea numerică a Hamiltonianului Bohr în forma sa cea mai generală a fost abordată încă de la introducerea modelului, materializându-se în aşa-numitul Model Geometric Colectiv [3–6]. În ciuda succesului său, acest model suferă de mai multe neajunsuri, care îl fac dificil de implementat pentru calcule directe. Limitele exact rezolvabile [7,8] însă conţin puţini parametri şi oferă calcule calitative surprinzător de bune. Totodată, aceste soluţii sunt foarte bune doar pentru descrierea crudă a unor aspecte limitate ale excitaţiilor colective. O varietate mai mare a comportărilor colective este în prezent accesibilă prin intermediul Modelului Algebric Colectiv [9], care reprezintă o variantă tractabilă computaţional a modelul geometric colectiv general. Totuşi, la fel ca în cazul soluţiilor analitice, complexitatea potenţialelor colective abordabile este limitată la cazul cu un singur minim global în spaţiul variabilelor de deformare, chiar dacă de data aceasta curvatura minimului este arbitrară. Acest lucru, împiedică aplicarea efectivă a modelului la nuclee tranziţionale, ale căror forme, prin definiţie şi observaţie, nu sunt nici sferice şi nici deformate.

Potenţialul critic pentru o tranziţie de fază corespunde fie unei gropi plate ori unui profil cu două gropi. Primul caz implică un amestec maxim al formelor, în timp ce cea de-a doua situaţie corespunde unui scenariu în care cele două forme corespunzătoare gropilor de potenţial coexistă [10]. Observaţiile experimentale sugerează faptul că realitatea este undeva la mijloc. Lipsa unei forme determinate pentru nucleele tranziţionale constituie un impediment major pentru modelarea teoretică a punctului critic asociat acestora. Acest impas a fost oarecum ocolit iniţial prin introducerea unor soluţii particulare pentru Hamiltonianul Bohr bazate pe un potenţial analitic de tip groapă dreptunghiulară infinită, care ignoră posibila barieră ce ar separa cele două minime de deformare între care s-ar face tranziţia de fază. Astfel de soluţii cum ar fi $E(5)$ [11], $X(5)$ [12] şi multe altele, au devenit în scurt timp adevărate puncte de referinţă pentru studiul atât teoretic cât şi experimental al fenomenelor colective critice din nucleele atomice [13]. Astfel, s-a aflat că aceste soluţii sunt strâns legate de simetria dinamică Euclideană [14]. Acest rezultat vine ca o consecinţă a solvabilităţii exacte a acestor modele. Este atunci natural să presupunem că simetria dinamică Euclidiană ar putea juca un rol important şi în descrierea unei tranziţii de fază ce trece printr-un punct critic ce implică şi coexistenţa de forme.

În cadrul acestui studiu, am considerat funcţii Bessel de ordinul unu pentru diagonalizarea unui Hamiltonian Bohr pentru un potenţial cu două minime în variabila de deformare β ce defineşte abaterea formei nucleare de la sfericitate. Funcţiile şi implicit ecuaţia Bessel sunt strâns legate de simetria dinamică Euclidiană. Într-adevăr, operatorul Casimir al grupului Euclidian coincide cu ecuaţia pentru funcţiile Bessel de ordinul unu. Scopul propus este de a oferi o cale simplă pentru a obţine spectrul energetic pentru cea mai simplă dar totodată cea mai generală formă a unui potenţial colectiv cu două minime în variabila β. Gama imensă de aspecte spectrale şi dinamice conţinute într-un astfel de formalism este folosită pentru investigarea fenomenului de amestec şi coexistenţă a formelor nucleare.

Se foloseşte Hamiltonianul Bohr [16]

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{\hat{\Lambda}^2}{\beta^2}\right] + V(\beta,\gamma), \tag{1}$$

unde B este masa considerată independentă de variabilele de deformare, iar

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{L}_k^2}{4\sin^2(\gamma - 2\pi k/3)}, \tag{2}$$

este operatorul Casimir $SO(5)$ ce descrie rotaţiile din spaţiul cinci-dimensional. Funcţia proprie a acestui operator Casimir este aşa-numita armonică sferică $SO(5)$ $\mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma,\Omega)$ [17], ce este indexată de numărul cuantic de senioritate τ [18]. Senioritatea defineşte şi valoarea proprie corespunzătoare a Casimirului $SO(5)$ [19]:

$$\hat{\Lambda}^2\mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma,\Omega) = \tau(\tau+3)\mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma,\Omega). \tag{3}$$

L este momentul cinetic intrinsec, M proiecţia sa, iar α este numărul cuantic lipsă ce deosebeşte multiplele realizări ale aceluiaşi moment cinetic în cadrul unui multiplet de senioritate bine determinată. Dacă potenţialul este funcţie doar de variabila β, atunci întreg Hamiltonianul (1) va conţine simetria grupului special ortogonal al rotaţiilor în cinci dimensiuni $SO(5)$. În acest caz, funcţia totală poate fi factorizată ca $\Psi_{\xi\tau\alpha LM} = R_{\xi\tau}(\beta)\mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma,\Omega)$, ξ jucând rolul numărului cuantic al excitaţiilor datorate variabilei β. Această instanţă a Hamiltonianului Bohr se spune că este γ-instabilă.

Pentru îndeplinirea obiectivului propus se va folosi potenţialul sextic:

$$\frac{2B}{\hbar^2}V(\beta) = v(\beta) = \beta^2 - a\beta^4 + b\beta^6, \tag{4}$$

şi metoda de diagonalizare introdusă în [10,15]. Acest potenţial are două minime, cu unul în origine, atunci când $b > 0$ şi $a^2 > 3b$. Diagonalizarea Hamiltonianului Bohr asociat unui astfel de potenţial este realizată cu ajutorul unei baze construite ca o dezvoltare de tip Bessel-Fourier [20], unde funcţiile componente sunt definite astfel:

$$\tilde{R}_{\tau n}(\beta) = \frac{\sqrt{2}\beta^{-\frac{3}{2}} J_\nu(z_n^\nu \beta/\beta_W)}{\beta_W J_{\nu+1}(z_n^\nu)}. \tag{5}$$

Funcţiile bazei sunt determinate de o alegere potrivită a parametrului de limită β_W. Acesta defineşte o ecuaţie de tip radial pentru un potenţial groapă infinită, a cărei soluţii sunt exprimate ca funcţii Bessel de ordinul unu J_ν cu $\nu = \tau + 3/2$ şi zerourile sale z_n^ν. Soluţia finală reprezentată ca o dezvoltare Bessel-Fourier este atunci dată de:

$$R_{\xi\tau}(\beta) = \sum_{n=1}^{n_{Max}} A_n^\xi \tilde{R}_{\tau n}(\beta), \tag{6}$$

unde n_{Max} este dimensiunea bazei trunchiate, în timp ce ξ deosebeşte ordinul soluţiei diagonalizării matricii Hamiltonianului:

$$H_{nm} = \left(\frac{z_n^\nu}{\beta_W}\right)^2 \delta_{nm} + \frac{2\sum_{i=1}^{3} v_i \left(\beta_W\right)^{2i} I_{nm}^{(\nu\nu,2i)}}{J_{\nu+1}(z_n^\nu) J_{\nu+1}(z_m^\nu)}, \tag{7}$$

unde $v_1 = 1$, $v_2 = -a$, $v_3 = b$. Integrala

$$I_{nm}^{(\nu\mu,k)} = \int_0^1 x^{k+1} J_\nu(z_n^\nu x) J_\mu(z_m^\mu x) dx,\ x = \beta/\beta_W, \tag{8}$$

este determinată numeric sau apelând la relaţii de recurenţă [20].

Parametrul de limită ce defineşte baza de diagonalizare depinde în general de starea calculată, precizia cu care se doreşte determinarea energiei acestei stări, de dimensiunea trunchierii bazei, precum şi de potenţialul folosit. În acest studiu, a fost fixat un parametru de limită β_W comun pentru toate stările considerate. Acest lucru a fost realizat prin fixarea în prealabil a dimensiunii bazei de diagonalizare şi apoi creşterea incrementală a parametrului de limită începând cu valoarea unde se află cel de al doilea minim al potenţialului, până când energiile tuturor stărilor considerate ating o convergenţă satisfăcătoare în ceea ce priveşte precizia prestabilită. Astfel, limita β_W va depinde doar de parametrii potenţialului sextic şi în consecinţă nu este un parametru liber. Avantajul bazei de diagonalizare folosite constă în faptul că partea solicitantă din punct de vedere computaţional este reprezentată doar de integralele (8) care nu depind de nici un parametru. Astfel, aceste integrale trebuie calculate doar o singură dată şi apoi factorizate de coeficienţii a şi b ai potenţialului pentru a calcula matricea Hamiltonianului.

Pentru o mai bună înţelegere a dinamicii sistemului ce reiese din prezenţa a două minime în potenţialul colectiv, ecuaţia diferenţială (1) cu (4) este transcrisă într-o formă Schrödinger unidimensională prin schimbarea de funcţie:

$$R_{\xi\tau}(\beta) = f_{\xi\tau}(\beta)/\beta^2. \tag{9}$$

Prin acest procedeu se obţine potenţialul efectiv:

$$v_{eff}(\beta) = \frac{\tau(\tau+3)+2}{\beta^2} + \beta^2 - a\beta^4 + b\beta^6. \tag{10}$$

Datorită contribuţiei centrifugale, minimul din zero al potenţialului original este deplasat atât ca valoare cât şi ca poziţie în cadrul reprezentării potenţialului efectiv. Această contribuţie centrifugală ce vine de la gradele de libertate hyper-rotaţionale afectează chiar şi starea fundamentală. Într-adevăr, atunci când $\tau = 0$, contribuţia centrifugală $2/\beta^2$ nu dispare. În aceste condiţii, este posibil ca un potenţial colectiv sextic cu două minime să fie de fapt asociat unei probleme efective pentru un potenţial cu un singur minim, fără efecte de coexistenţă. Din acest punct de vedere, se poate afirma că potenţialul efectiv conţine mai multă informaţie despre proprietăţile dinamice ale sistemului descris.

Variaţia parametrilor a şi b ce definesc potenţialul sextic produce o mare diversitate de comportări dinamice colective incluzând şi cazuri exotice [10]. Efectul variaţiei adiabatice a fiecărui parametru asupra proprietăţilor spectrale este dificil de extras într-o manieră edificatoare. Este posibil totuşi să se aleagă o cale în spaţiul parametrilor a şi b caracterizată de anumite proprietăţi specifice ale potenţialului sextic ce ar fi de interes. În acest studiu am ales să cercetez proprietăţile oferite de modelul propus în cazul când potenţialul efectiv pentru $\tau = 0$ ce descrie atât starea fundamentală cât şi stările β excitate 0^+, are două minime degenerate în energie. Evident, o astfel de restricţie este orientată spre o interpretare geometrică a coexistenţei de forme în stările de energie joasă şi impune o relaţie funcţională între cei doi parametri a şi b ai potenţialului. Funcţia $a = f(b)$ este determinată numeric şi corespunde unei evoluţii de la bariere înalte şi subţiri consemnate de valori mici ale lui a la bariere joase şi extinse obţinute la valori mari ale lui a.

Pentru aplicaţiile numerice am considerat o bază de dimensiunea $n_{Max} = 30$. O astfel de trunchiere a bazei şi determinarea parametrului de limită β_W corespunzător, garantează că orice mărire a bazei va produce modificări ale energiilor considerate ce vor fi mai mici decât precizia prestabilita de 10^{-7} a energiilor absolute care sunt de ordinul unităţilor. Dat fiind faptul că baza de diagonalizare este special menită pentru potenţiale cu mai multe minime, performanţa acesteia este comparată cu tradiţionala diagonalizare în baza stărilor oscilatorului armonic sferic din cinci dimensiuni. Se constată că în cazul parametrilor a şi b ce realizează un potenţial efectiv pentru starea fundamentală cu două minime degenerate şi cu o barieră separatoare moderată ce permite tunelarea dintre ele, baza propusă cu parametrul fixat iniţial pentru dimensiunea $n_{Max} = 30$ converge de două ori mai repede cu creşterea dimensiunii bazei decât în cazul funcţiilor de oscilator. Acest lucru nu este întâmplător, deoarece bazele construite pe funcţii de oscilator sferice sau deformate oferă un câştig în rata de convergenţă pentru un minim cu preţul scăderii preciziei pentru cel de al doilea minim al potenţialului.

Fenomenologia asociată dinamicii sistemului din starea fundamentală şi stările β excitate cu $\tau = 0$ ce urmează calea din spaţiul parametrilor a şi b corespunzătoare unui potenţial efectiv pentru $\tau = 0$ cu două minime degenerate, poate fi extrasă din evoluţia soluţiilor evidenţiată în distribuţia probabilităţii de deformare β:

$$\rho_{\xi\tau}(\beta) = [R_{\xi\tau}(\beta)]^2\beta^4. \tag{11}$$

Astfel, pentru valori mici ale lui $a = f(\beta)$, atunci când bariera separatoare este foarte înaltă, starea fundamentală este localizată în groapa cu deformare mare, iar prima stare β excitată este localizată în groapa de deformare mică. În această situaţie, datorată impenetrabilităţii barierei separatoare, cele două stări precum şi benzile rotaţionale construite pe acestea până la o anumită frecvenţă nu interacţionază între ele şi posedă deformări β medii extrem de diferite. Din punct de vedere fenomenologic, această imagine corespunde unei coexistenţe de forme nucleare definite ca existenţa într-un singur nucleu a unor seturi de stări cu caracteristici aparţinând la forme foarte distincte [21].

Crescând parametrul a de-a lungul funcţiei $a = f(b)$ specificate, bariera devine mai joasă şi începe să intervină tunelarea cuantică dintre cele două gropi, fapt reflectat într-un schimb de probabilitate de distribuţie a deformării între cele două gropi de potenţial. Când se întâmplă acest lucru, probabilitatea de distribuţie a deformării pentru primele două stări 0^+ începe să prezinte o formă cu două vârfuri. Apariţia celor două vârfuri în starea 0^+ β excitată este datorată formării unui nod în funcţia de undă asociată. Acest lucru este specific unei stări excitate vibraţional unde cele două vârfuri emergente corespund la deformarea punctelor de întoarcere a vibraţiei [22]. Funcţia de undă în variabila

β a stării fundamentale, din contra, nu are un nod. Dar chiar şi aşa, totuşi prezintă şi ea o distribuţie de probabilitate a deformării cu două vârfuri. Din punct de vedere fenomenologic, acest lucru este înţeles prin prisma fenomenului de coexistenţă în acelaşi nucleu dar şi în aceiaşi stare, a două forme foarte diferite. În acelaşi raţionament, excitaţia β este rezultatul unei vibraţii mai generale între două minime [22–24]. Acest caz special este asociat cu aşa-numitul fenomen de coexistenţă a formelor cu amestec [21].

În sfârşit, atunci când bariera separatoare este sub nivelul stării fundamentale, efectul acesteia începe să scadă până devine complet neglijabil. Apogeul acestei tendinţe constă în obţinerea unei funcţii de undă pentru starea fundamentală cu un profil al probabilităţii de deformare având un singur vârf foarte extins ce cuprinde ambele gropi de potenţial. În acelaşi timp, starea 0^+ β excitată va căpăta un caracter vibraţional mult mai pronunţat. Toate aceste aspecte sunt bine-cunoscute ca fiind signaturi ale fluctuaţiilor mari ale formei nucleare ce au loc în punctele critice ale tranziţiei de fază dintre forma sferică şi cea deformată a nucleului atomic.

Degenerarea stărilor teoretice conform grupului $SO(5)$ este rar regăsită în spectrele colective experimentale. Pentru a îmbunătăţi aplicabilitatea formalismului, realizarea experimentală a acestuia este căutată cu un termen rotaţional invariant la grupul $SO(3)$, folosit pentru desfacerea multipleţilor de senioritate în componente cu moment cinetic distinct. Justificarea teoretică a unui astfel de termen vine din considerente de simetrie. Modelul Bohr în general satisface o algebră Heisenberg-Weyl ce generează grupul $HW(5)$ [25]. Funcţiile de undă ale bazei de diagonalizare folosite în acest studiu sunt clasificate conform numerelor cuantice asociate lanţului de subgrupuri:

$$\begin{array}{ccccccc} E(5) & \supset & SO(5) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2), \\ \xi & & \tau & & L & & M \end{array} \tag{12}$$

unde $E(5)$ este simetria dinamică pentru soluţia Hamiltonianului Bohr γ-instabil cu un potenţial de tip groapă dreptunghiulară infinită pentru variabila β, iar $SO(D)$ sunt grupurile speciale ortogonale ale rotaţiilor în $D = 2, 3$ şi 5 dimensiuni. Atunci, produsul semi-direct $[HW(5)]E(5)$ defineşte grupul de simetrie dinamică care este potrivit pentru tratarea Hamiltonianului Bohr în varianta sa γ-instabilă cu un potenţial ce are mai multe minime. Cea mai generală formă a Hamiltonianului într-o astfel de simetrie este dat de suma operatorilor Casimir din lanţul de subalgebre al grupului şi un potenţial în variabila

β

$$H_{[HW(5)]E(5)} = c_1 C[E(5)] + c_2 C[SO(5)] + c_3 C[SO(3)] + V(\beta), \tag{13}$$

unde $c_i (i = 1, 2, 3)$ sunt parametri liberi. Operatorul Casimir al lui $E(5)$ este exact operatorul cinetic al Hamiltonianului Bohr, în timp ce $C[SO(5)] = \hat{\Lambda}^2$ iar $C[SO(3)] = \hat{L}^2$. Pentru o reproducere cantitativă a datelor experimentale cu un număr cât mai mic de parametri, cel de al doilea operator Casimir poate fi omis. Această alegere se rezumă la modificarea Hamiltonianului (1) prin adunarea unui termen ce conservă simetria $SO(5)$, şi anume $\hat{L}^2$. Acesta are menirea de a desface multipletul τ de nivele energetice fără a schimba funcţia de undă totală [26]. Acest lucru este posibil deoarece armonicile sferice $SO(5)$ sunt funcţii proprii atât pentru $\hat{\Lambda}^2$ cât şi pentru $\hat{L}^2$ şi $\hat{L}_3$ cu valorile proprii $L(L+1)$ şi respectiv M.

Formalismul, fără nici o restricţie impusă parametrilor a şi b, a fost aplicat cu succes pentru descrierea stărilor de energie joasă ale nucleelor ^{96,98,100}Mo, scoţând în evidenţă aspecte legate de coexistenţa de forme a acestor nuclee.

Obiectivul 2: *Studiul problemelor cvasi-exact solubile descrise de ecuaţia Schrödinger pentru un potenţial sextic.*

Rezultate preconizate:

- Stabilirea legăturii dintre cvasi-exact solvabilitatea unei ecuaţii Schrödinger multidimensionale pentru un potential sextic şi soluţiile polinomiale ale ecuaţiei diferenţiale Heun biconfluente.
- Extinderea spectrului algebrizabil al ecuaţiei Schrödinger pentru un potential sextic prin variaţia ordinului de exact solvabilitate cu momentul orbital.
- Realizarea unui raport final ce va include rezultatele importante aferente programului de cercetare propus.

Ataşat acestui raport este forma finală a lucrării ce prezintă rezultatele obţinute prin îndeplinirea acestui obiectiv. În cele ce urmează voi prezenta pe scurt concluziile reieşite din acest studiu ce fac obiectul acestui raport de cercetare final.

Emergenţa soluţiilor polinomiale pentru ecuaţia diferenţială Heun bi-confluentă [27] a fost investigată în legătură cu noţiunea de solvabilitate cvasi-exactă [28–31]. Formalismul analitic complet a fost folosit mai apoi pentru a studia proprietatea de solvabilitate cvasi-exactă a ecuaţiei Schrödinger hyper-radiale în D dimensiuni

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+D-2)}{r^2}+V(r)-E_{nl}\right]\Psi_{n_rl}(r)=0, \tag{14}$$

pentru un potenţial sextic izotrop

$$V(r)=ar^2+br^4+r^6, \tag{15}$$

unde $\hbar = 2m = 1$, în timp ce l este numarul cuantic associat grupului ortogonal al rotaţiilor $SO(D)$, iar indicele n_r denotă soluţiile distincte ale excitaţiilor asociate variabilei radiale r.

Acest lucru a fost realizat prin aducearea, printr-o schimbare de variabilă $y = r^2/\sqrt{2}$ şi de funcţie

$$\Psi_{n_rl}(y)\sim y^{-(D-1)/4}y^{\frac{\lambda+1}{2}}e^{-\frac{x}{4}(\sqrt{2}b+2x)}h(y), \tag{16}$$

a ecuaţiei Schrödinger radiale associate acestei probleme, la o formă canonică a ecuaţiei Heun bi-confluente [32–36]

$$\begin{aligned}&yh''(y)+\left(1+\alpha-\beta y-2y^2\right)h'(y)\\&+\left\{(\gamma-\alpha-2)y-\frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right]\right\}h(y)=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Condiţiile necesare pentru a avea soluţii polinomiale pentru ecuaţia Heun [34] sunt apoi transpuse în constrângeri asupra parametrilor potenţialului exprimate în funcţie de numărul cuantic de rotaţie l, dimensiunea spaţiului D precum şi ordinul de solvabilitate exactă n:

$$a=\frac{b^2}{4}-2l-D-4n-2. \tag{18}$$

n defineşte de fapt ordinul de trunchiere al soluţiilor polinomiale pentru ecuaţia Heun bi-confluentă şi deci dictează numărul de stări ce pot fi obţinute algebric exact în forme analitice compacte.

Pentru a avea un potenţial independent de stare, coeficienţii a şi b trebuie să fie invarianţi la schimbarea numărului cuantic l şi a ordinului de trunchiere n

$$l+2n=K=const. \tag{19}$$

Acest lucru poate fi realizat prin varierea lui l cu două unităţi corelată cu varierea lui n cu o unitate [37–41]. Astfel, setând o valoare maximă pentru n, se pot determina doar stări cu l par sau doar stări l impar. Numărul de soluţii pentru un l fixat scade odată cu valoarea lui l. Acest artificiu matematic are rolul de a adapta formalismul solvabilităţii cvasi-exacte la potenţiale independente de stare. Un avantaj adiţional este oferit şi de mărirea numărului de stări ce pot fi detereminate exact.

Proprietăţile potenţialului sextic în aceste condiţii, sugerează reacţii diferite la variaţia mărimilor implicate, în cele trei faze ale potenţialului determinate de caracteristici specifice ale punctelor sale critice:

1) Când potenţilul sextic are un singur punct minim în origine, domeniul de existenţă a soluţiilor exacte în spaţiul parametrilor săi este restrâns odată cu mărirea dimensiunii D şi ordinului maxim de solvabilitate exactă.

2) Pentru potenţiale cu un maxim în $r = 0$ şi un minim în $r > 0$, domeniul de existenţă al soluţiilor exacte creşte odata mărirea atât a dimensiunii spaţiului cât şi a ordinului maxim de solvabilitate exactă.

3) În final, există potenţiale cvasi-exact solubile ce prezintă simultan două minime, cu unul în origine. Domeniul lor de existenţă fiind mai mic pentru ordine maxime de solvabilitate exactă şi dimensiune D mai mari.

Ca exemplu demonstrativ al acestei metode, au fost realizate nişte calcule pentru cazul tridimensional. În concluzie, studiul realizat oferă o descriere completă a proprietăţii de solvabilitate cvasi-exactă a potenţialului sextic izotropic în ceaa ce priveşte soluţiile polinomiale ale ecuaţiei Heun bi-confluente. Trebuie de menţionat că formalismul descris este uşor transpozabil în aplicaţii fizice concrete. Deasemenea, a fost arătat faptul că mecanismul ce menţine potenţialul independent de stare extinde utilitatea proprietăţii de solvabilitate cvasi-exactă, fapt ce se reflectă şi într-o creştere consistentă a numărului de stări exact solubile ale potenţialului considerat.

Obiectivele prezentate în cadrul propunerii de ceretare au fost realizate integral, iar rezultatele preconizate au fost atinse.

Referinţe

[1] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. 2, Benjamin, Reading, Massachusetts, 1975.

[2] W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1980).

[3] G. Gneuss, U. Mosel and W. Greiner, Phys. Lett. B **30**, 397 (1969).

[4] G. Gneuss and W. Greiner, Nucl. Phys. A **171**, 449 (1971).

[5] D. Habs, H. Klewe-Nebenius and K. Wisshak, Z. Physik **267**, 149 (1974).

[6] P. O. Hess, M. Seiwert, J. Maruhn, and W. Greiner, Z. Phys. A **296**, 147 (1980).
[7] L. Fortunato, Eur. Phys. J. A **26**, s01, 1 (2005).
[8] P. Buganu and L. Fortunato, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **43**, 093003 (2016).
[9] D. J. Rowe and J. L. Wood, *Fundamentals of nuclear models: Foundational Models* (World Scientific, Singapore, 2010).
[10] R. Budaca and A. I. Budaca, EPL **123**, 42001 (2018).
[11] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **85**, 3580 (2000).
[12] F. Iachello, Phys. Rev. Lett. **87**, 052502 (2001).
[13] R. F. Casten, Nature Phys. **2**, 811 (2006).
[14] R. Budaca and A. I. Budaca, Phys. Lett. B **759**, 349 (2016).
[15] R. Budaca, P. Buganu, and A. I. Budaca, Phys. Lett. B **776**, 26 (2018).
[16] A. Bohr, Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk. **26**, 14 (1952).
[17] D. J. Rowe, P. S. Turner, and J. Repka, J. Math. Phys. **45**, 2761 (2004).
[18] G. Rakavy, Nucl. Phys. **4**, 289 (1957).
[19] D. R. Bes, Nucl. Phys. **10**, 373 (1959).
[20] H. Taşeli and A. Zafer, J. Comput. Appl. Math. **95**, 83 (1998).
[21] K. Heyde and J. L. Wood, Rev. Mod. Phys. **83**, 1467 (2011).
[22] M. D. Harmony, Chem. Soc. Rev. **1**, 211 (1972).
[23] Q. B. Chen, S. Q. Zhang, P. W. Zhao, R. V. Jolos, and J. Meng, Phys. Rev. C **94**, 044301 (2016).
[24] R. Budaca, Phys. Rev. C **98**, 014303 (2018).
[25] D. J. Rowe, Prog. Part. Nucl. Phys. **37**, 265 (1996).
[26] M. A. Caprio and F. Iachello, Nucl. Phys. A **781**, 26 (2007).
[27] K. Heun *Math. Ann.* 33:161, 1888.
[28] A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994).
[29] A. V. Turbiner, Phys. Rep. **642**, 1-71 (2016).
[30] M. A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilarte, A. Moreno Mosquera, and M. de la Torre Mayado, arXiv:1406.2643v2.
[31] G. Lévai and A. M. Ishkhanyan, Mod. Phys. Lett. A **34**, 1950134 (2019).
[32] P. Maroni, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **264**, 503-505 (1967).
[33] A. Decarreau, M. Cl. Dumont-Lepage, P. Maroni, A. Robert, and A. Ronveaux, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I **92**, 53-78 (1978).
[34] A. Decarreau, P. Maroni, and A. Robert, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I **92**, 151-189 (1978).
[35] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations* (Oxford University Press, Oxford, 1995).
[36] S. Y. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities* (Oxford University Press, Oxford, 2000).
[37] G. Lévai and J. M. Arias, Phys. Rev. C **69**, 014304 (2004).
[38] G. Lévai and J. M. Arias, Phys. Rev. C **81**, 044304 (2010).
[39] P. Buganu and R. Budaca, Phys. Rev. C **91**, 014306 (2015).
[40] P. Buganu and R. Budaca, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **42**, 105106 (2015).
[41] R. Budaca, P. Buganu, M. Chabab, A. Lahbas, and M. Oulne, Ann. Phys. (NY) **375**, 65-90 (2016).

Data

Noiembrie 2019 Radu Budaca

Quasi-exact solvability of the D-dimensional sextic potential in terms of truncated bi-confluent Heun functions

R. Budaca*

Abstract

The D-dimensional Schrödinger equation for an isotropic sextic potential is brought to a form compatible with the canonical bi-confluent Heun differential equation. The quasi-exactly solvable properties of the model are recovered by considering polynomial solutions for the bi-confluent Heun equation which constrains the potential parameters in terms of rotation quantum number, space dimension and order of the exact solvability. It is shown that the state independence of the potential can be maintained by using a see-saw adjustment between the rotation quantum number and the exact solvability order. An analysis on the exactly solvable instances of the sextic potential is presented in correlation with the extended set of exactly solvable states.

MSC: 34Axx, 34Bxx, 81Qxx, 81Vxx

keywords: Schrödinger equation, Quasi exact solvability, bi-confluent Heun differential equation.

1 Introduction

The study of Heuns differential equation [1] and its confluent forms is a very important in mathematics [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] due to its many valuable

*`rbudaca@theory.nipne.ro` Department of Theoretical Physics, "*Horia Hulubei* " National Institute for Physics and Nuclear Engineering, Reactorului 30, RO-077125, POB-MG6, Bucharest Magurele, Romania; Academy of Romanian Scientists, 54 Splaiul Independenţei, RO-050094, Bucharest, Romania

physics applications [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Indeed, the special cases of the confluent Heun equation include well known mathematical physics equations, such as the Spheroidal, Generalized Spheroidal, Whittaker-Hill, Razavy, Mathieu and many other equations. In particular, the confluent Heun equation was consistently used in quantum mechanics for the purpose of finding new categories of solvable potentials [18, 19, 20]. As the Schrödinger equation is the cornerstone of quantum mechanical treatment of physical systems, the information related to it is essential. Exact solutions of the Schrödinger equation determined in a fully algebraic manner, are directly related to the symmetry properties of the model. The study of these solutions reveals real or hidden and unexpected properties of the modeled physical systems and provides guidelines to construct consistent perturbation approaches for quantitative calculations of relevant quantities for more complex potentials. The limited number of exactly solvable potentials include the Coulomb, Kratzer, harmonic oscillator, Davidson, Morse, Pöschl-Teller, Scarf, Rosen-Morse, Eckart, Nathanzon and a few others. A bridge between exact models and the exactly non-solvable potentials is offered by the notion of quasi-exact solvability [22], which is understood as the property of the model to have only a finite number of exact and explicit analytical solutions for certain parametrizations of the considered potential. All these quasi-exactly solvable models arise as special cases of the confluent Heun equation with polynomial solutions [14, 8]. In this sense, especially useful for physical phenomena are few double-well potentials, whose low-lying eigenstates are related to the finite polynomial solutions of the confluent Heun equation. In many cases, extension to multiple dimensions is possible, however with particular changes in physical implications [14].

Here, the case of the quasi-exactly solvable multidimensional isotropic sextic potential will be considered in terms of the polynomial solutions of the bi-confluent Heun equation. The aim of the study is to obtain the restriction of the potential parameters in terms of the dimension of the coordinate space and using this condition to extend and optimize the number of exactly solvable states for a certain set of potential parameters. Additionally, the quasi-exactly solvable form of the potential is analyzed in what concerns the number of exhibiting critical points.

The paper is structured as follows. In the next section, the general canonical form of the bi-confluent Heun differential equation will be presented together with the conditions which accommodate solutions of the polynomial type. Section 3 will be devoted to the relation between the quasi-exactly solvable D-dimensional Schrödinger equation for an isotropic sextic potential and the bi-confluent Heun equation with polynomial solutions. In Section

4, an example calculation will be presented for the three-dimensional case. The final conclusions will be drawn in the last section.

2 Polynomial solutions of the bi-confluent Heun differential equation

The canonical form of the bi-confluent Heun differential equation is [2, 3, 4, 5, 6]:

$$\begin{aligned} & y h''(y) + \left(1 + \alpha - \beta y - 2y^2\right) h'(y) \\ & + \left\{(\gamma - \alpha - 2)y - \frac{1}{2}\left[\delta + \beta(1+\alpha)\right]\right\} h(y) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

If $\alpha > 0$, it admits solutions of the power series form [4]:

$$h(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{(1+\alpha)_p p!} y^p, \tag{2}$$

where $A_0 = 1$, and

$$(x)_p = \frac{\Gamma(x+p)}{\Gamma(x)} = x(x+1)...(x+p-1). \tag{3}$$

is a Pochhammer symbol [21]. The coefficients A_p must then satisfy the three-term recurrence relation

$$\begin{aligned} & A_{p+2} - A_{p+1}\left\{(p+1)\beta + \frac{1}{2}\left[\delta + \beta(1+\alpha)\right]\right\} \\ & + A_p(\gamma - 2 - \alpha - 2p)(p+1)(p+\alpha+1) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

which is obtained from Eq.(1) when inserting (2) into it. In order to have polynomial solutions, the power series (2) must be firstly bounded below, which results in the initial condition $A_{-1} = 0$ for the recurrence relation. The truncation from above of the power series is conditioned by

$$\gamma - 2 - \alpha = 2n, \;\; n = 0, 1, 2, .., \tag{5}$$

and

$$A_{n+1} = 0. \tag{6}$$

Applying these conditions to the recurrence relation (4), one can easily see that all coefficients A_p with $p > n$ vanish and the series (2) is indeed truncated to a polynomial of degree n. The last condition actually represents a set of linear equations for the non-vanishing coefficients A_n:

$$-\frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right]A_0 + A_1 = 0, \tag{7}$$

$$2n(1+\alpha)A_0 - \left\{\beta + \frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right]\right\}A_1 + A_2 = 0,$$

$$4(n-1)(2+\alpha)A_1 - \left\{2\beta + \frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right]\right\}A_2 + A_3 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2n(n+\alpha)A_{n-1} + \left\{n\beta + \frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right]\right\}A_n = 0. \tag{8}$$

The system of linear equations can be written in a matrix form as:

$$\mathbf{M}A = \begin{pmatrix} \Delta_0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \Delta_1 & 1 & 0 & : & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & \Delta_2 & 1 & : & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & \Delta_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & \Gamma_{n-1} & \Delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ .. \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

where

$$\Delta_k = -\frac{1}{2}\left[\delta+\beta(1+\alpha)\right] - k\beta, \tag{10}$$

$$\Gamma_k = 2k(n-k+1)(k+\alpha). \tag{11}$$

Finally, one can see that the second restriction (6) amounts to the compatibility condition

$$det\mathbf{M} = 0. \tag{12}$$

The truncation of the power series (2) infer that the associated model is quasi-exactly solvable [22], that is only a limited set of its states can be explicitly determined in an algebraic manner. As a matter of fact, quasi-exact solvability is directly connected to polynomial solutions of the general Heun equation [14, 8, 23]. The quasi-exact solvability of Schrödinger equations which can be brought to the bi-confluent Heun equation form is of two types. If the energy is contained explicitly in the first condition (5), then it is said that the model's quasi-exact solvability is of type two, else the energy is determined from the compatibility condition (6) and the quasi-exact solvability is of type one [14]. Note however, that in the first case the compatibility condition will be used to determine the other parameters involved in the first condition (5) and consequently defining the energy. For example, oscillator-like potentials lead to quasi-exactly solvable problems of first type, while Coulomb-like potentials are of the second type.

3 Sextic potential in D dimensions

For a particle moving in an isotropic potential in D dimensions, the hyper-radial equation has the form:

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+D-2)}{r^2}+V(r)-E_{nl}\right]\Psi_{n_r l}(r)=0. \qquad (13)$$

The energy units are such that $\hbar = 2m = 1$, while l is the quantum number associated to the orthogonal group of rotations in D dimensions $SO(D)$. The index n_r denotes distinct solutions of the equation for fixed l. The above equation is written in a convenient Schrödinger canonical form

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2}+V(r)-E_{nl}\right]\Phi_{n_r l}(r)=0, \qquad (14)$$

with the help of the change of function $\Phi_{n_r l}(r) = r^{(D-1)/2}\Psi_{n_r l}(r)$ and using the notation $\lambda = l + (D-3)/2$. In what follows one will consider a sextic potential of the following form:

$$V(r) = Ar^2 + Br^4 + Cr^6. \qquad (15)$$

It is easy to verify that the energy eigenvalue of the Schrödinger equation for such a potential satisfies the scaling property:

$$E(A,B,C) = C^{-\frac{1}{4}}E(AC^{-\frac{1}{2}}, BC^{-\frac{3}{4}}, 1). \qquad (16)$$

Other two relationships can be found such that to obtain parameter free factor for the harmonic (r^2) or the quartic (r^4) term. The choice made here, will become useful in comparing the results with the quasi-exactly solvable model of Ref.[22]. Leaving aside the scale dependence, all information can be obtained by solving just the sextic potential:

$$V(r) = ar^2 + br^4 + r^6. \qquad (17)$$

In order to solve the Schrödinger equation for this potential by means of Heun functions, one first make the change of variable $y = r^2/\sqrt{2}$. The new differential equation then reads as

$$\left[y\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}-\frac{\lambda(\lambda+1)}{4y}-\frac{1}{4}\left(ay+2by^2+4y^3-E\right)\right]\tilde{\Phi}_{n_rl}(y)=0, \quad (18)$$

where $\tilde{\Phi}_{n_rl}(y) = \Phi_{n_rl}(\sqrt{y\sqrt{2}})$.

Making now the change of function $\tilde{\Phi}_{n_rl}(y) = y^{\frac{\lambda+1}{2}}e^{-\frac{x}{4}(\sqrt{2}b+2x)}h(y)$, one arrives at the following equation

$$\begin{aligned} &yh''(y)+\left(\lambda+\frac{3}{2}-\frac{b}{\sqrt{2}}y-2y^2\right)h'(y)\\ &+\left\{\left(\frac{b^2}{8}-\lambda-\frac{5}{2}-\frac{a}{2}\right)y+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[E-\frac{b}{2}(2\lambda+3)\right]\right\}h(y)=0. \quad (19)\end{aligned}$$

Comparing it with (1), the following correspondences can be made:

$$\alpha=\lambda+\frac{1}{2},\ \beta=\frac{b}{\sqrt{2}},\ \delta=-\frac{E}{\sqrt{2}},\ \gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{4}-a\right), \quad (20)$$

and

$$\Delta_k = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[E-b\left(\lambda+\frac{3}{2}+2k\right)\right], \quad (21)$$

$$\Gamma_k = k(n-k+1)(2k+2\lambda+1). \quad (22)$$

In order to have finite polynomial solutions, the first condition (5) becomes a relation between the potential parameters, the rotation quantum number λ and the truncation order n:

$$a=\frac{b^2}{4}-2\lambda-5-4n=\frac{b^2}{4}-2l-D-4n-2. \quad (23)$$

In order to have a state-independent potential, the coefficients a and b must be invariant with the change of rotation quantum number l and the truncation order n. This is realized, if the following condition is fulfilled:

$$l+2n=K=const. \quad (24)$$

A see-saw variation of l and n can work within this restriction [24, 25, 26, 27, 28]. Indeed, increasing l with two units, will trigger the decrease of n with a single unit. Setting a maximum value n_{Max} for n, one can exactly determine only the odd-l or even-l states, with l-dependent number of solutions for the r variable.

Let us turn to the general form of the sextic potential, whose critical points are $r = 0$ and

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 3a}\right)}. \tag{25}$$

Plugging in the above equation the identities (23) and (24), one obtains the quasi-exactly solvable form of the sextic potential

$$V_{QE}(r) = \left(\frac{b^2}{4} - 2(K+1) - D\right) r^2 + br^4 + r^6, \tag{26}$$

whose non-zero critical points are given by

$$r_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(-b \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + 6(K+1) + 3D}\right)}. \tag{27}$$

Judging by the number of critical points, there are three different cases:

1) For $b > 2\sqrt{2(K+1)+D}$, the potential (26) has a single minimum in $r = 0$. The domain of existence for this case decreases with the increase of the dimensions number D and the number of exactly solvable states involved in the quantity K.

2) The critical point $r = 0$ of the potential (26) becomes a maximum, and an additional minimum appears at r_+ if $-2\sqrt{2(K+1)+D} < b < 2\sqrt{2(K+1)+D}$. The increase of $2(K+1)+D$ quantity causes the increase of the existence interval, the lowering in energy of the potential minimum and the displacement of the minimum position to higher r values. The effect of b variation is opposite.

3) Finally, potential (26) can have simultaneously minima in $r = 0$ and r_+, separated by a maximum in r_- when $b < -2\sqrt{2(K+1)+D}$. In this case, increasing $2(K+1)+D$ leads to an energy lowering for the maximum and non-zero minimum of the potential, and to their shifting to low and respectively larger values of r. While larger values of b correspond to a simultaneously increased maximum and decreased minimum of the potential, both being displaced to higher r values.

The total wave function corresponding to the D-dimensional Schrödinger equation for a quasi-exactly solvable sextic potential can be written as follows:

$$\Psi_{n_r l}(r) = N_{n_r l} r^l e^{-\frac{r^4}{4}-\frac{br^2}{4}} \sum_{p=0}^{n_{Max}-\frac{l+\tau}{2}} \frac{A_p^{n_r}}{\left(l+\frac{D}{2}\right)_p p!}\left(\frac{r^2}{\sqrt{2}}\right)^p, \tag{28}$$

where $\tau = 0$ for even l states, and $\tau = 1$ for odd l states, while n_r denotes the order of the solution for the secular equation involving the coefficients A_p. The norm $N_{n_r l}$ can be determined in terms of hypergeometric functions of the first kind [21].

At this point, it is instructive to compare this formalism with the one-dimensional quasi-exactly solvable model of Ref.[22], whose differential operator is

$$\begin{aligned} &-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\left(2s-\frac{3}{2}\right)\left(2s-\frac{1}{2}\right)}{x^2} \\ &+\left[b'^2 - 4a'\left(s+\frac{1}{2}+n\right)\right]x^2 + 2a'b'x^4 + a'^2x^6. \end{aligned} \tag{29}$$

The above equation can be easily recovered from the formulas (13) and (26) by matching the involved parameters as:

$$a' = 1,\ \ b' = \frac{b}{2},\ \ 2s = l + \frac{D}{2}, \tag{30}$$

and with integer n having the same significance of exact solvability order.

4 Three-dimensional case

In order to clarify the procedure, one will treat here the case of $D = 3$ for a maximal truncation order $n_{Max} = 1$ and consider only the even l states. This choice amounts to $K = 2$ and to the following state-independent form of the quasi-exactly solvable sextic potential

$$V_{QE}(r) = \left(\frac{b^2}{4} - 9\right) r^2 + br^4 + r^6. \tag{31}$$

As can be seen, the results will have a parametric dependence only on b. For $l = 0$, the truncation order is $n = 1$ and the compatibility condition for the non-vanishing coefficients A_0 and A_1 reads:

$$det \begin{vmatrix} \Delta_0 & 1 \\ \Gamma_1 & \Delta_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{32}$$

It can be expanded into a quadratic equation for the energy

$$\sqrt{E^2 - b\left(l+\frac{5}{2}\right)} - b^2 - 8(2l+3). \tag{33}$$

The two solution for the energy are then

$$\begin{aligned} E_{00} &= b\left(l+\frac{5}{2}\right) - \sqrt{b^2 + 16\left(l+\frac{3}{2}\right)}, & (34)\\ E_{10} &= b\left(l+\frac{5}{2}\right) + \sqrt{b^2 + 16\left(l+\frac{3}{2}\right)}, & (35)\end{aligned}$$

with the corresponding wave-functions:

$$\begin{aligned} \Psi_{00}(r) &= N_{00}e^{-\frac{r^4}{4}-\frac{br^2}{4}}\left[1+\frac{b-\sqrt{b^2+16\left(l+\frac{3}{2}\right)}}{4\left(l+\frac{3}{2}\right)}r^2\right], & (36)\\ \Psi_{10}(r) &= N_{10}e^{-\frac{r^4}{4}-\frac{br^2}{4}}\left[1+\frac{b+\sqrt{b^2+16\left(l+\frac{3}{2}\right)}}{4\left(l+\frac{3}{2}\right)}r^2\right], & (37)\end{aligned}$$

where coefficients $A_0 = 1$ and A_1 were determined from the two-dimensional system of linear equations with compatibility condition (32).

Now, for $l = 2$ and $n = 0$, there is a single solution which is simply

$$E_{02} = b\left(l+\frac{3}{2}\right), \quad \Psi_{02}(r) = N_{02}r^2e^{-\frac{r^4}{4}-\frac{br^2}{4}}. \tag{38}$$

5 Conclusions

The emergence of polynomial solutions for the bi-confluent Heun differential equation was discussed in connection to the notion of quasi-exact solvability. The formalism was used to investigate the quasi-exact solvability of the D-dimensional Schrödinger equation for an isotropic sextic potential. This was done by bringing the corresponding Schrödinger equation, through a change of variable and function, to a canonical bi-confluent Heun form. The conditions for polynomial solutions of the bi-confluent Heun equation are transposed into constrains on the potential parameters in terms of rotation quantum number, space dimension and order of the exact solvability.

The properties of the sextic potential within these constraints suggest distinct responses to the variation of the involved quantities associated to three well defined phases, where the potential have specific critical point characteristics. A mathematical artifice is used to adapt the formalism to state independent potentials with extended number of exactly solvable states in what concerns both radial and rotational quantum numbers. An illustrative example of the method was presented for the three-dimensional case. In conclusion, the present study provides a complete description of the quasi-exact solvability property of the isotropic sextic potential in connection to the polynomial solutions of the bi-confluent Heun equation, which is easily transposable to concrete applications. Also, it was shown that the mechanism assuring the potential's state independence leads to an extension of the quasi-exact solvability's utility, reflected in a greater number of exactly solvable states associated the considered potential.

References

[1] K. Heun. Zur theorie der Riemann'schen functionen zweiter ordnung mit vier verzweigungspunkten. *Math. Ann.* 33:161, 1888.

[2] P. Maroni. Equations differentielle. Sur le forme bi-confluente de l'equation de Heun. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 264:503-505, 1967.

[3] A. Decarreau, M. Cl. Dumont-Lepage, P. Maroni, A. Robert, A. Ronveaux. Formes canoniques des equations confluentes de l'equation de Heun. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I* 92:53-78, 1978.

[4] A. Decarreau, P. Maroni, A. Robert. Sur les equations confluentes de l'equation de Heun. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I* 92:151-189, 1978.

[5] A. Ronveaux. *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.

[6] S. Y. Slavyanov, W. Lay. *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[7] E. R. Arriola, A. Zarzo, J. S. Dehesa. Spectral properties of the biconfluent Heun differential equation. *J. Comp. and App. Math.* 37:161-169, 1991.

[8] M. A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilarte, A. Moreno Mosquera, M. de la Torre Mayado. On the quasi-exact solvability of the confluent heun equation. arXiv:1406.2643v2.

[9] H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç. Extension of Nikiforov-Uvarov method for the solution of Heun equation. *J. Math. Phys.* 56:063504, 2015.

[10] H. Ciftci, R. L. Hall, N. Saad, E. Dogu. Physical applications of second-order linear differential equations that admit polynomial solutions. *J. Phys. A: Math. Theor.* 43:415206, 2010.

[11] Y.-H. Zhang. Exact polynomial solutions of second order differential equations and their applications. *J. Phys. A: Math. Theor.* 45:065206, 2012.

[12] Bei-Hua Chen Yan Wu, Qiong-Tao Xie. Heun functions and quasi-exactly solvable double-well potentials. *J. Phys. A: Math. Theor.* 46:035301, 2013.

[13] F. Caruso, J. Martins, V. Oguri. Solving a two-electron quantum dot model in terms of polynomial solutions of a Biconfluent Heun equation. *Ann. Phys.* 347:130140, 2014.

[14] A. V. Turbiner. One-dimensional quasi-exactly solvable Schrödinger equations. *Phys. Rep.* 642:1-71, 2016.

[15] H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkiliç. Solution of Schrödinger equation for two different potentials using extended Nikiforov-Uvarov method and polynomial solutions of biconfluent Heun equation. *J. Math. Phys.* 59:053501, 2018.

[16] Q. Xie. QAnalytical results for periodically-driven two-level models in relation to Heun functions. *Pramana J. Phys.* 91:19, 2018.

[17] M. Hortaçsu. Heun functions and some of their applications in physics. *Adv. High Energy Phys.* 2018:8621573, 2018.

[18] A. K. Bose. Solvable potentials. *Phys. Lett.* 7:4-7, 1963.

[19] A. Lemieux, A. K. Bose. Construction de potentiels pour lesquelles lequation de Schrödinger est soluble. *Ann. Inst. H Pointcare* A10:259-270, 1969.

[20] F. T. Hioe, D. MacMillan. E. W. Montroll, Quantum theory of anharmonic oscillators. *J. Math. Phys.* 17:1320-1327, 1976.

[21] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. New York: Dover, 1972.

[22] A. G. Ushveridze, *Quasi-Exactly Solvable Models in Quantum Mechanics* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994).

[23] G. Lévai, A. M. Ishkhanyan. Exact solutions of the sextic oscillator from the bi-confluent Heun equation. *Mod. Phys. Lett. A* 34:1950134, 2019.

[24] G. Lévai, J. M. Arias. The sextic oscillator as a γ-independent potential. *Phys. Rev. C* 69:014304, 2004.

[25] G. Lévai, J. M. Arias. Search for critical-point nuclei in terms of the sextic oscillator. *Phys. Rev. C* 81:044304, 2010.

[26] P. Buganu, R. Budaca. Analytical solution for the Davydov-Chaban Hamiltonian with a sextic potential for $\gamma = 30^\circ$. *Phys. Rev. C* 91:014306, 2015.

[27] P. Buganu, R. Budaca. Sextic potential for γ-rigid prolate nuclei. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 42:105106, 2015.

[28] R. Budaca, P. Buganu, M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne. Extended study on a quasi-exact solution of the Bohr Hamiltonian. *Ann. Phys. (NY)* 375:65-90, 2016.

[29] B. Leaute, G. Marcilhacy. On the Schrodinger equations of rotating harmonic, three-dimensional and doubly anharmonic oscillators and a class of confinement potentials in connection with the biconfluent Heun differential equation. *J. Phys. A: Math. Gen.* 19:3527, 1986.