Raport nr. 2

Prof. univ. dr. Bogdan SASU

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach

Director: Prof. univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN Megan

Studiul a fost realizat în colaborare cu Prof. univ. dr. A. L. Sasu şi s-a concretizat în articolul [17].

Activitatea desfăşurată în a doua etapă a proiectului a vizat următoarele:

- analiza rezultatelor existente în literatură privind stabilitatea exponenţială a sistemelor variaţionale discrete (a se vedea [6], [7], [9], [12], [13], [14] şi referinţele incluse);
- analiza tehnicilor de lucru care vizează utilizarea unor clase de spaţii de şiruri (a se vedea [1]–[15], [18]);
- realizarea unui studiu complet şi general privind caracterizarea stabilităţii exponenţiale a sistemelor variaţionale în limbaj de solvabilitate a unui sistem cu control asociat, utilizând clase de spaţii de şiruri cu proprietăţi specifice.

Fie X un spaţiu Banach real sau complex, $\mathcal{B}(X)$ spaţiul operatorilor liniari şi mărginiţi pe X, iar I_d operatorul identitate pe spaţiul X.

Fie Θ un spaţiu metric. Fie $\sigma : \Theta \to \Theta$ o funcţie arbitrară. Notăm cu

$$\sigma^0(\theta) := \theta, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Prin inducţie, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$\sigma^n : \Theta \to \Theta, \quad \sigma^n(\theta) := \sigma(\sigma^{n-1}(\theta)).$$

Fie $A : \Theta \to \mathcal{B}(X)$ o funcţie arbitrară. Considerăm sistemul variaţional discret

$$(A) \qquad x_\theta(n+1) = A(\sigma^n(\theta))x_\theta(n), \quad \forall (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}.$$

Sistemului (A) i se asociază *cociclul discret* definit prin:

$$\mathcal{A} : \Theta \times \mathbb{N} \to \mathcal{B}(X), \quad \mathcal{A}(\theta, n) := \begin{cases} A(\sigma^{n-1}(\theta)) \ldots A(\theta), & n \in \mathbb{N}^* \\ I_d, & n = 0 \end{cases}.$$

Pentru proprietăţile cociclului discret referim [7], [14]. Pentru exemple de cocicli discreţi în diverse spaţii referim [3], [4], [9].

Spunem că sistemul (A) este:

(i) *uniform stabil* dacă există o constantă $L \geq 1$ cu proprietatea

$$||\mathcal{A}(\theta, n)|| \leq L, \quad \forall(\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N};$$

(ii) *uniform exponențial stabil* dacă există două constante $N \geq 1$ și $\nu > 0$ cu proprietatea

$$||\mathcal{A}(\theta, n)|| \leq Ne^{-\nu n}, \quad \forall(\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}.$$

Considerăm sistemul cu control $(S_A) = \{S_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, asociat lui (A), unde pentru fiecare $\theta \in \Theta$:

$$(S_\theta) \qquad \begin{cases} x_\theta(n+1) = A(\sigma^n(\theta))x_\theta(n) + s(n+1), & n \in \mathbb{N} \\ x_\theta(0) = s(0) \end{cases}.$$

Relativ la acest sistem definim o proprietate de stabilitate de tip intrare-ieșire între două spații de șiruri, invariante la translații (Definiția 3.2).

În debut obținem o condiție suficientă pentru stabilitatea uniformă și o caracterizare pentru stabilitatea uniformă (Lema 3.1, Corolarul 3.1). Apoi formulăm criterii suficiente pentru stabilitatea exponențială uniformă impunând condiții privind spațiul de ieșire (Teorema 3.1), respectiv spațiul de intrare (Teorema 3.2). În final, demonstrăm o caracterizare foarte generală pentru stabilitatea exponențială uniformă a sistemelor variaționale discrete (Teorema 3.3).

Rezultatele au fost obținute în cel mai general caz de sisteme variaționale discrete, cu coeficienți arbitrari, în raport cu fluxuri discrete arbitrare. Rezultatele continuă studiile din articolele [14] și [7]. Rezultatele obținute în [17] generalizează teoreme de tip intrare-ieșire pentru stabilitate obținute în cazul neautonom în [11], respectiv în cazul variațional în [9], [12] și [13].

Rezultatele obținute în prima etapă, detaliate în primul raport, au fost redactate în articolul [16] care este în curs de finalizare și de trimitere spre publicare la un jurnal clasificat ISI.

Prof. univ. dr. Bogdan Sasu

Data: 30.11.2019

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Aulbach, N. Van Minh, *The concept of spectral dichotomy for linear difference equations II*, J. Difference Equ. Appl. **2** (1996), 251–262.

[2] L. Barreira, D. Dragičević, C. Valls, *Admissibility and Hyperbolicity*, Springer Briefs in Mathematics, Springer, 2018.

[3] C. Chicone, Y. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys and Monogr., vol. 70, Providence, R.I. Amer. Math. Soc., 1999.

[4] S. N. Chow, H. Leiva, *Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflow in Banach space*, J. Differential Equations **120** (1995), 429–477.

[5] C.V. Coffman, J. J. Schäffer, *Dichotomies for linear difference equations*, Math. Ann. **172** (1967), 139-166.

[6] D. Dragičević, *Datko-Pazy conditions for nonuniform exponential stability*, J. Difference Equ. Appl. **24** (2018), no. 3, 344-357.

[7] D. Dragičević, A. L. Sasu, B. Sasu, *On the asymptotic behavior of discrete dynamical systems - An ergodic theory approach*, J. Differential Equations (2019), 44 p. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.10.037

[8] S. Elaydi, K. Janglajew, *Dichotomy and trichotomy of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **3** (1998), 417-448.

[9] M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu, *Theorems of Perron type for uniform exponential stability of linear skew-product semiflows*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **12** (2005), 23-43.

[10] M. Pituk, *A criterion for the exponential stability of linear difference equations*, Appl. Math. Lett. **17** (2004), 779–783.

[11] B. Sasu, A. L. Sasu, *Stability and stabilizability for linear systems of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), 1085-1105.

[12] A. L. Sasu, *Admisibilitate şi proprietăţi asimptotice ale cociclilor*, Editura Politehnica, 2005.

[13] B. Sasu, *Sisteme variaţionale*, Editura Politehnica, 2009

[14] B. Sasu, *Stability of difference equations and applications to robustness problems*, Adv. Difference Equ. (2010), Article ID 869608, 1-24.

[15] B. Sasu, A. L. Sasu, *On the dichotomic behavior of discrete dynamical systems on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 3057–3084.

[16] A. L. Sasu, B. Sasu, *On strong exponential dichotomy of discrete nonautonomous system*, work in progress - to be submitted

[17] A. L. Sasu, B. Sasu, *On exponential stability of discrete dynamical systems*, work in progress - to be submitted

[18] L. Zhou, W. Zhang, *Admissibility and roughness of nonuniform exponential dichotomies for difference equations*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 1087-1129.