Raport nr. 2

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa SASU

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach

Director: Prof. univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN

Studiul a fost realizat în colaborare cu Prof. univ. dr. B. Sasu şi s-a concretizat în articolul [17].

Activitatea desfăşurată în a doua etapă a vizat următoarele:

- analiza rezultatelor existente în literatură privind stabilitatea exponenţială a sistemelor variaţionale discrete (a se vedea [6], [7], [9], [12], [13], [14] şi referinţele incluse);
- analiza tehnicilor de lucru care vizează utilizarea unor clase de spaţii de şiruri (a se vedea [1]–[15] respectiv [18]);
- realizarea unui studiu complet şi general privind caracterizarea stabilităţii exponenţiale a sistemelor variaţionale în limbaj de solvabilitate a unui sistem cu control asociat, utilizând clase de spaţii de şiruri cu proprietăţi specifice.

Fie X un spaţiu Banach, real sau complex. Notăm cu $\mathcal{B}(X)$ spaţiul operatorilor liniari şi mărginiţi pe X şi cu I_d operatorul identitate pe spaţiul X.

Fie Θ un spaţiu metric şi fie $\sigma : \Theta \to \Theta$ o funcţie arbitrară. Notăm cu

$$\sigma^0(\theta) := \theta, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Inductiv, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, definim

$$\sigma^n : \Theta \to \Theta, \quad \sigma^n(\theta) := \sigma(\sigma^{n-1}(\theta)).$$

Fie $A : \Theta \to \mathcal{B}(X)$ o funcţie arbitrară. Considerăm sistemul variaţional discret

$$(A) \qquad x_\theta(n+1) = A(\sigma^n(\theta))x_\theta(n), \quad \forall (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}.$$

Acestuia îi asociem cociclul discret

$$\mathcal{A} : \Theta \times \mathbb{N} \to \mathcal{B}(X), \quad \mathcal{A}(\theta, n) := \begin{cases} A(\sigma^{n-1}(\theta)) \dots A(\theta), & n \in \mathbb{N}^* \\ I_d, & n = 0 \end{cases}.$$

Pentru proprietăţile cociclului discret referim [7], [14]. Pentru diverse exemple de cocicli discreţi referim [3], [4], [9].

Sistemul (A) se zice:

(i) *uniform stabil* dacă există $L \geq 1$ astfel încât

$$||\mathcal{A}(\theta, n)|| \leq L, \quad \forall (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N};$$

(ii) *uniform exponențial stabil* dacă există $N \geq 1$ şi $\nu > 0$ astfel încât

$$||\mathcal{A}(\theta, n)|| \leq N e^{-\nu n}, \quad \forall (\theta, n) \in \Theta \times \mathbb{N}.$$

Sistemului (A) îi asociem sistemul cu control $(S_A) = \{S_\theta\}_{\theta \in \Theta}$, unde pentru fiecare $\theta \in \Theta$:

$$(S_\theta) \qquad \begin{cases} x_\theta(n+1) = A(\sigma^n(\theta))x_\theta(n) + s(n+1), & n \in \mathbb{N} \\ x_\theta(0) = s(0) \end{cases}.$$

În raport cu acest sistem introducem o proprietate de stabilitate de tip intrare-ieşire între două spaţii abstracte de şiruri, invariante la translaţii (Definiţia 3.2).

Mai întâi deducem o condiţie suficientă pentru stabilitatea uniformă, respectiv o caracterizare pentru stabilitatea uniformă (Lema 3.1, Corolarul 3.1). În continuare, formulăm criterii suficiente pentru stabilitatea exponenţială impunând anumite condiţii asupra spaţiului de ieşire (Teorema 3.1), respectiv asupra spaţiului de intrare (Teorema 3.2). În final, obţinem o caracterizare foarte generală pentru stabilitatea exponenţială uniformă (Teorema 3.3).

Rezultatele se obţin în cel mai general caz al sistemelor discrete variaţionale cu coeficienţi arbitrari şi în raport cu fluxuri discrete arbitrare. Rezultatele continuă studiile din [14], respectiv din [7]. În plus, rezultatele obţinute generalizează teoremele de tip intrare-ieşire pentru stabilitate obţinute în [9], [11], [12] şi [13].

Rezultatele din prima etapă, detaliate în primul raport, au fost redactate în articolul [16] care este în curs de finalizare şi de trimitere spre publicare la un jurnal clasificat ISI.

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa Sasu

Sasu

Data: 30.11.2019

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Aulbach, N. Van Minh, *The concept of spectral dichotomy for linear difference equations II*, J. Difference Equ. Appl. **2** (1996), 251–262.

[2] L. Barreira, D. Dragičević, C. Valls, *Admissibility and Hyperbolicity*, Springer Briefs in Mathematics, Springer, 2018.

[3] C. Chicone, Y. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys and Monogr., vol. 70, Providence, R.I. Amer. Math. Soc., 1999.

[4] S. N. Chow, H. Leiva, *Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflow in Banach space*, J. Differential Equations **120** (1995), 429–477.

[5] C.V. Coffman, J. J. Schäffer, *Dichotomies for linear difference equations*, Math. Ann. **172** (1967), 139-166.

[6] D. Dragičević, *Datko-Pazy conditions for nonuniform exponential stability*, J. Difference Equ. Appl. **24** (2018), no. 3, 344-357.

[7] D. Dragičević, A. L. Sasu, B. Sasu, *On the asymptotic behavior of discrete dynamical systems - An ergodic theory approach*, J. Differential Equations (2019), 44 p, https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.10.037

[8] S. Elaydi, K. Janglajew, *Dichotomy and trichotomy of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **3** (1998), 417-448.

[9] M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu, *Theorems of Perron type for uniform exponential stability of linear skew-product semiflows*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **12** (2005), 23-43.

[10] M. Pituk, *A criterion for the exponential stability of linear difference equations*, Appl. Math. Lett. **17** (2004), 779–783.

[11] B. Sasu, A. L. Sasu, *Stability and stabilizability for linear systems of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), 1085-1105.

[12] A. L. Sasu, *Admisibilitate şi proprietăţi asimptotice ale cociclilor*, Editura Politehnica, 2005.

[13] B. Sasu, *Sisteme variaţionale*, Editura Politehnica, 2009

[14] B. Sasu, *Stability of difference equations and applications to robustness problems*, Adv. Difference Equ. (2010), Article ID 869608, 1-24.

[15] B. Sasu, A. L. Sasu, *On the dichotomic behavior of discrete dynamical systems on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 3057–3084.

[16] A. L. Sasu, B. Sasu, *On strong exponential dichotomy of discrete nonautonomous system*, work in progress - to be submitted

[17] A. L. Sasu, B. Sasu, *On exponential stability of discrete dynamical systems*, work in progress - to be submitted

[18] L. Zhou, W. Zhang, *Admissibility and roughness of nonuniform exponential dichotomies for difference equations*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 1087-1129.