Raport intermediar nr. 1

Prof. univ. dr. Bogdan SASU

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach

Director: Prof. univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN

Studiul a fost realizat în colaborare cu Prof. univ. dr. A. L. Sasu şi a vizat următoarele:

- analiza rezultatelor existente în literatură privind caracterizarea dichotomiei sistemelor dinamice discrete neautonome în limbaj de admisibilitate (a se vedea [1]–[11] şi referinţele incluse);
- studiul impactului condiţiilor de admisibilitate relativ la mărginirea familiei de proiectori de dichotomie exponenţială;
- analizarea posibilităţii renunţării la ipoteza de coeficienţi mărginiţi pentru sistemul discret iniţial.

Fie X un spaţiu Banach, real sau complex şi $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o familie de operatori liniari şi mărginiţi pe X. Se consideră sistemul discret neautonom

$$(A) \qquad x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Acestuia îi asociem familia de evoluţie discretă $\Phi_A = \{\Phi_A(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ dată de

$$\Phi_A(m,n) := \begin{cases} A(m-1)\cdots A(n) & , \quad m > n \\ I_d & , \quad m = n \end{cases}$$

unde $\Delta = \{(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : m \geq n\}$.

O parte substanţială din studiile asupra comportărilor asimptotice ale sistemelor discrete neautonome au fost făcute pentru cazul în care sistemul are coeficienţi uniform mărginiţi (a se vedea [1]–[3], [5], [6]) adică există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$||A(n)|| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Aceasta este echivalentă cu proprietatea de creştere exponenţială uniformă a familiei de evoluţie asociată, adică există $\omega > 0$ astfel încât

$$||\Phi_A(m,n)|| \leq e^{\omega(m-n)}, \quad \forall m \geq n.$$

Spunem că sistemul (A) admite o dichotomie exponenţială tare dacă există o familie de proiectori $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(X)$ şi două constante $K \geq 1$ şi $\nu > 0$ astfel încât sunt satisfăcute următoarele proprietăţi:

(i) $A(n)P(n) = P(n+1)A(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z};$

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||P(n)|| < \infty;$

(iii) $||\Phi_A(m,n)x|| \leq Ke^{-\nu(m-n)}||x||, \quad \forall x \in Range\, P(n), \quad \forall m \geq n;$

(iv) $||\Phi_A(m,n)y|| \geq \frac{1}{K}\, e^{\nu(m-n)}||y||, \quad \forall y \in Ker\, P(n), \quad \forall m \geq n;$

(v) restricţia $A(n)_| : Ker\, P(n) \to Ker\, P(n+1)$ este un izomorfism, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

În cazul particular în care sistemul (A) are coeficienţi uniform mărginiţi şi există o familie de proiectori $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ şi două constante $K \geq 1$, $\nu > 0$ încât proprietăţile (i), (iii)-(v) sunt satisfăcute, atunci are loc şi proprietatea (ii) (a se vedea de exemplu [5]). Dar, situaţia interesantă este aceea în care se poate lucra în cel mai general caz, fără nici o condiţie asupra coeficienţilor sistemului. Mai mult, în acel caz este importantă formularea unor condiţii suficiente pentru dichotomie care să implice nu numai existenţa familiei de proiectori şi comportarea asimptotică pe imagini şi nuclee, cât şi mărginirea uniformă a familiei de proiectori.

Pentru a răspunde acestor probleme deschise, sistemului (A) îi asociem sistemul cu control

$$(S_A) \qquad \gamma(n+1) = A(n)\gamma(n) + s(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

cu intrarea s şi ieşirea γ şi definim o proprietate de admisibilitate care constă în solvabilitatea unică a acestuia între două spaţii de şiruri invariante la translaţii. În anumite ipoteze asupra spaţiilor de intrare respectiv de ieşire arătăm că admisibilitatea unei perechi de spaţii Banach de şiruri invariante la translaţii implică existenţa dichotomiei exponenţiale tare, deci inclusiv mărginirea uniformă a familiei de proiectori.

Un rol decisiv în metoda noastră îl are cunoaşterea structurii familiei de proiectori de dichotomie şi a expresiei acestora în limbaj de spaţiul de ieşire.

Rezultatele se obţin în cel mai general caz al sistemelor discrete neautomone cu coeficienţi arbitrari.

Prof. univ. dr. Bogdan SASU

Bsasu

Data: 20.07.2019

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Aulbach, N. Van Minh, The concept of spectral dichotomy for linear difference equations, II, J. Differ. Equations Appl. 2 (1996), 251-262.

[2] S. Elaydi, K. Janglajew, Dichotomy and trichotomy of difference equations, J. Differ. Equations Appl. 3 (1998), 417–448.

[3] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] K. J. Palmer, Shadowing in Dynamical Systems, Mathematics and Its Applications Vol. 501, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] A. L. Sasu and B. Sasu, *Exponential dichotomy and admissibility for evolution families on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13 (2006), 1-26.

[6] A. L. Sasu and B. Sasu, *Discrete admissibility, ℓ^p-spaces and exponential dichotomy on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13 (2006), 551-561.

[7] A. L. Sasu, *Exponential dichotomy and dichotomy radius for difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), 906–920.

[8] B. Sasu and A. L. Sasu, *On the dichotomic behavior of discrete dynamical systems on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), 3057–3084.

[9] A. L. Sasu and B. Sasu, *Discrete admissibility and exponential trichotomy of dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014), 2929–2962.

[10] A. L. Sasu and B. Sasu, *Exponential trichotomy and (r,p)-admissibility for discrete dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 22 (2017), 3199-3220.

[11] A. L. Sasu and B. Sasu, *On some dichotomy properties of dynamical systems on the whole line*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 11 (2019), 175-201.

[12] A. L. Sasu and B. Sasu, *On exponential dichotomy of discrete dynamical systems*, în curs de redactare