Raport intermediar nr. 1

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa SASU

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach

Director: Prof. univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN Colici

Studiul a fost realizat în colaborare cu Prof. univ. dr. B. Sasu şi a vizat următoarele:

- analiza rezultatelor existente în literatură privind caracterizarea dichotomiei sistemelor dinamice discrete neautonome în limbaj de admisibilitate (a se vedea [1]–[11] şi referinţele incluse);
- studiul impactului condiţiilor de admisibilitate relativ la mărginirea familiei de proiectori de dichotomie exponenţială;
- analizarea posibilităţii renunţării la ipoteza de coeficienţi mărginiţi pentru sistemul discret iniţial.

Fie X un spaţiu Banach, real sau complex. Fie $\Delta = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m \geq n\}$. Considerăm $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o familie de operatori liniari şi mărginiţi pe X şi sistemul discret neautonom

$$(A) \qquad x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Sistemului (A) îi asociem familia de evoluţie discretă $\Phi_A = \{\Phi_A(m,n)\}_{(m,n)\in\Delta}$ definită prin

$$\Phi_A(m,n) := \begin{cases} A(m-1)\cdots A(n) & , \ m > n \\ I_d & , \ m = n \end{cases}.$$

O parte importantă din studiile privind comportările asimptotice ale sistemelor discrete neautonome au fost făcute pentru cazul în care sistemul are coeficienţi uniform mărginiţi (a se vedea [1]–[3], [5], [6]) adică există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$||A(n)|| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ceea ce este echivalent cu proprietatea de creştere exponenţială uniformă a lui Φ_A, adică există $\omega > 0$ astfel încât

$$||\Phi_A(m,n)|| \leq e^{\omega(m-n)}, \quad \forall m \geq n.$$

Spunem că sistemul (A) admite o *dichotomie exponenţială tare* dacă există o familie de proiectori $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{B}(X)$ şi două constante $K \geq 1$ şi $\nu > 0$ astfel încât sunt satisfăcute următoarele proprietăţi:

(i) $A(n)P(n) = P(n+1)A(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z};$

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{Z}} ||P(n)|| < \infty;$

(iii) $||\Phi_A(m,n)x|| \leq Ke^{-\nu(m-n)}||x||, \ \forall x \in Range\, P(n), \ \forall m \geq n;$

(iv) $||\Phi_A(m,n)y|| \geq \frac{1}{K}\, e^{\nu(m-n)}||y||, \ \forall y \in Ker\, P(n), \ \forall m \geq n;$

(v) restricţia $A(n)_| : Ker\, P(n) \to Ker\, P(n+1)$ este un izomorfism, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

În cazul particular în care (A) este cu coeficienţi uniform mărginiţi, dacă există o familie de proiectori $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ şi două constante $K \geq 1$, $\nu > 0$ încât proprietăţile (i), (iii)-(v) au loc, atunci este satisfăcută şi proprietatea (ii) (a se vedea de exemplu [5]). Însă, cazul interesant este acela în care nu se impune nici o condiţie asupra coeficienţilor sistemului (A). În plus, în acel caz este importantă identificarea unor condiţii suficiente pentru existenţa dichotomiei care să implice nu doar existenţa unei familii de proiectori şi proprietăţile asimptotice pe imaginile şi nucleele acestora, cât şi proprietatea de mărginire uniformă a familiei de proiectori.

În scopul de a răspunde acestor întrebări, îi asociem sistemului (A), sistemul cu control

$$(S_A) \qquad\qquad \gamma(n+1) = A(n)\gamma(n) + s(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

cu intrarea (şirul test) s şi ieşirea (soluţia) γ. Definim un concept de admisibilitate care constă în solvabilitatea unică a sistemului (S_A) între două spaţii Banach de şiruri, netriviale, care sunt invariante la translaţii. În anumite ipoteze privind spaţiile de intrare respectiv de ieşire, obţinem că admisibilitatea unei perechi de spaţii Banach de şiruri invariante la translaţii implică existenţa dichotomiei exponenţiale tare, deci şi mărginirea uniformă a familiei de proiectori.

Un rol definitoriu în metoda propusă îl are obţinerea structurii familiei de proiectori de dichotomie în limbaj de spaţiul de ieşire.

Rezultatele se obţin în cel mai general caz al sistemelor discrete neautomone cu coeficienţi arbitrari.

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa SASU

Sasu

Data: 20.07.2019

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Aulbach, N. Van Minh, The concept of spectral dichotomy for linear difference equations, II, J. Differ. Equations Appl. 2 (1996), 251-262.

[2] S. Elaydi, K. Janglajew, Dichotomy and trichotomy of difference equations, J. Differ. Equations Appl. 3 (1998), 417–448.

[3] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, New York, 1981.

[4] K. J. Palmer, Shadowing in Dynamical Systems, Mathematics and Its Applications Vol. 501, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] A. L. Sasu and B. Sasu, *Exponential dichotomy and admissibility for evolution families on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13 (2006), 1-26.

[6] A. L. Sasu and B. Sasu, *Discrete admissibility, ℓ^p-spaces and exponential dichotomy on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 13 (2006), 551-561.

[7] A. L. Sasu, *Exponential dichotomy and dichotomy radius for difference equations*, J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), 906–920.

[8] B. Sasu and A. L. Sasu, *On the dichotomic behavior of discrete dynamical systems on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), 3057–3084.

[9] A. L. Sasu and B. Sasu, *Discrete admissibility and exponential trichotomy of dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014), 2929–2962.

[10] A. L. Sasu and B. Sasu, *Exponential trichotomy and (r,p)-admissibility for discrete dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 22 (2017), 3199-3220.

[11] A. L. Sasu and B. Sasu, *On some dichotomy properties of dynamical systems on the whole line*, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 11 (2019), 175-201.

[12] A. L. Sasu and B. Sasu, *On exponential dichotomy of discrete dynamical systems*, în curs de redactare