

Raport final de activitate - 30.11.2018  
Prof. Dr. Habil. Mihaela Neamțu

**Titlul proiectului: Comportări asymptotice pentru sisteme dinamice în spații Banach**  
**Director: Prof. Univ. Dr. Mihail MEGAN**

În cadrul acestui proiect, **ne-am propus**:

- O.1. Să descriem modele matematice pentru diferite procese economice și biologice precum: cooperarea și competiția mai multor jucători pe o piață, managementul sustenabil al unei zone turistice, dereglaři sistemică în schizofrenie, etc.
- O.2. Să studiem proprietăile de stabilitate și fenomenele de bifurcație ce apar în anumite sisteme dinamice descrise de ecuații diferențiale cu întârzieri sau ecuații cu derivate fracționare, având în vedere aplicații în economie și biologie.
- O.3. Să efectuăm simulări numerice pentru verificarea rezultatelor teoretice.

În cadrul acestui proiect, colaborând cu Conf. Dr. Eva Kaslik, am studiat următoarele teme:

**TEMA 1. Managementul sustenabil al unei zone turistice**

Activități realizate:

A.1.1 Studiul literaturii de specialitate existente (articole reprezentative): (Afsharnezhad, Z., Dadi, Z., & Monfared, Z. (2017), Casagrandi, R., & Rinaldi, S. (2002), Lacitignola, D., Petrosillo, I., Cataldi, M., & Zurlini, G. (2007), Russu, P. (2009), (2012), Wei, W., Alvarez, I., & Martin, S. (2013)).

A.1.2 Analiza stabilității pentru cele trei puncte de echilibru în modelul de management sustenabil al unei zone turistice generice

De-alungul anilor industria turismului s-a dezvoltat în multe părți ale lumii. Este bine cunoscut faptul că dezvoltarea infrastructurii turistice specifice cerute de o anumită locație turistică are un impact negativ asupra mediului și a resurselor naturale. Prin urmare, trebuie menit un echilibru pentru a proteja și conserva zonele înconjurătoare.

Casagrandi și Rinaldi (2002) au introdus modelul minimal în contextul turismului și a demonstrat că este practic imposibil să se garanteze un turism durabil fără impact negativ și direct al mediului. Lacitignola și alții (2007), luând în considerare cele două categorii principale de turism (de masă și ecoturism), analizează scenarii diferite pentru o gestionare eficientă a unei locații turistice. În 2013, Wei et al. s-a realizat o analiză a stabilității pentru punctul de echilibru când parametrul investițional ia diferite valori.

Russu (2009) a dezvoltat un alt tip de model matematic care utilizează ideea veniturilor din turism bazate pe natură. S-a introdus întârzierea și poate provoca fluctuații ale sistemului bio-economic. Apoi, în 2012, a studiat maximizarea fluxului de numerar rezultat din vizitatori pe baza dinamicii interacțiunii dintre resursele unui parc natural și numărul de turiști.

Noi generalizăm modelul minimal existent al unei locații turistice generale într-un mod mai realist, prin includerea întârzierea care apare în procesul economic.

Modelul matematic cu timp întârziat este dat de:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)A(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \\ \dot{x}_2(t) = rx_2(t)\left(1 - \frac{x_2(t)}{K}\right) - x_2(t)(\eta x_3(t) + \gamma x_1(t - \tau)) \\ \dot{x}_3(t) = \varepsilon x_1(t - \tau) - \delta x_3(t) \end{cases} \quad (1)$$

Pentru sistemul (1) am demonstrat existența soluțiilor pozitive. Mai mult, am determinat punctele de echilibru:

$$S_0 = (0, 0, 0), \quad S_1 = (0, K, 0), \quad S_2 = (x_{10}, 0, \frac{\varepsilon}{\delta}x_{10}),$$

unde  $x_{10} = r(\eta \frac{\varepsilon}{\delta} + \gamma)^{-1}$ .

În plus, există cel puțin un punct de echilibru strict pozitiv al sistemului (1) dacă și numai dacă ecuația are cel puțin o soluție pozitivă:

$$s_3x^3 + s_2x^2 + s_1x + s_0 = 0. \quad (2)$$

Pentru analiza existenței bifurcației Hopf am efectuat transformarea:  $y_1(t) = x_1(t) - x_{10}$ ,  $y_2(t) = x_2(t) - x_{20}$ ,  $y_3(t) = x_3(t) - x_{30}$ , iar (1) devine:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = f_1(y_1(t), y_2(t), y_3(t)), \\ \dot{y}_2(t) = f_2(y_1(t - \tau), y_2(t), y_3(t)), \\ \dot{y}_3(t) = f_3(y_1(t - \tau), y_3(t)), \end{cases} \quad (3)$$

unde

$$x_{20} = \frac{k(\delta r - (\eta \varepsilon + \gamma \delta)x_{10})}{\delta r}, \quad x_{30} = \frac{\varepsilon x_{10}}{\delta} \quad (4)$$

și  $x_{10}$  este soluția pozitivă a ecuației (2).

Liniarizatul lui (3) în  $(0, 0, 0)^T$  este de forma:

$$\dot{u}(t) = Au(t) + Bu(t - \tau), \quad (5)$$

unde  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ , iar ecuația caracteristică este de forma:

$$h(\lambda, \tau) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - (m_{11}\lambda + m_{10})e^{-\lambda\tau}. \quad (6)$$

- A.1.3. Am arătat că echilibrul pozitiv își pierde stabilitatea asimptotică atunci când parametrii sistemului verifică anumite condiții și am determinat valoarea critică a parametrului de întârziere.
- A.1.4. Analiza criticalității bifurcației de tip Hopf s-a realizat prin reducerea la varietatea centrală și determinarea formei normale
- A.1.5. Realizarea unor simulări numerice pentru a valida rezultatele teoretice obținute.
- A.1.6 Redactarea în formă finală a două lucrări științifice (Anexa 1 și Anexa 2).

## TEMA 2. Dereglări sistemică în schizofrenie

Activități realizate:

- A.2.1 Studiul literaturii existente (articole relevante enumerate mai jos) referitoare la descrierea matematică a proceselor economice ce privesc dereglațiile sistemică în schizofrenie: Radulescu, A. R., & Mujica-Parodi, L. R. (2008), Radulescu, A. (2008), (2009), Radulescu, A. R., & Mujica-Parodi, L. R. (2009), Radulescu, A. R., Rubin, D., Strey, H. H., & Mujica-Parodi, L. R. (2012).

A.2.2 Conceperea unui model matematic cu întârziere discretă:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -\mu_1 a - k_1 p - k_1 h + I \\ \dot{p}(t) = k_2 a - g(\delta_\tau)p + \frac{\gamma_2}{a_1 C + 1} h \\ \dot{h}(t) = g(\delta_\tau^2)p - a_2 C \\ \dot{\delta}(t) = \xi g(\delta)(p + h - a) \end{cases} \quad (7)$$

unde variabilele  $a$ ,  $p$ ,  $h$ ,  $\delta$  reprezintă activarea temporală a amigdalei, hippocampusului, cortexului prefrontal și respectiv a sistemului dopaminei, iar  $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$ , parametri fiind reali și pozitivi. Acest model extinde modelul fără întârzieri introdus în (Radulescu, 2009), scopul fiind de a clarifica efectul întârzierii ce apare în influența dopaminei asupra deregulațiilor sistemice.

A.2.3 Investigarea stabilității punctului de echilibru al sistemului (7) precum și a fenomenului de bifurcație Hopf ce are loc în vecinătatea acestuia, în funcție de valoarea întârzierii  $\tau$ .

A.2.4 Realizarea unor simulări numerice pentru verificarea rezultatelor teoretice obținute.

A.2.5 Redactarea unei lucrări în formă finală ce va fi submisă pentru Proceeding-ul conferinței NODYCON 2019 (Roma, Italia), publicat la editura Springer. Abstractul extins al lucrării este anexat (Anexa 3).

### TEMA 3. Cooperarea și competiția mai multor jucători pe o piață

A.3.1 Studiul literaturii de specialitate existente (articole relevante): (Bignami, F., & Agliari, A. (2006), Elsadany, A. A., & Matouk, A. E. (2014), Gao, Y. H., Liu, B., & Feng, W. (2014), Matsumoto, A., & Szidarovszky, F. (2015), Zhao, L., Liu, X., & Ji, N. (2017), Pecora, N., & Sodini, M. (2018))

A.3.2 Analiza stabilității celor patru puncte de echilibru pentru modelul de tip Cournot cu întârzieri distribuite, ce descrie cooperarea și competiția mai multor jucători pe piață:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) \left[ a - c_1 - 2b \int_{-\infty}^t x(s)k_1(t-s)ds - b \int_{-\infty}^t y(s)k_2(t-s)ds \right] \\ \dot{y}(t) = \beta y(t) \left[ a - c_2 - b \int_{-\infty}^t x(s)k_3(t-s)ds - 2b \int_{-\infty}^t y(s)k_4(t-s)ds \right] \end{cases} \quad (8)$$

unde parametri sunt reali și pozitivi, iar nucleele  $k_i(t)$  reprezintă densități de probabilitate cu media  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Cele patru puncte de echilibru ale sistemului (8) sunt:

$$E_1 = (0, 0), \quad E_2 = \left( 0, \frac{a - c_2}{2b} \right), \quad E_3 = \left( \frac{a - c_1}{2b}, 0 \right), \quad E_4 = \left( \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b} \right).$$

Toate aceste puncte de echilibru au componente pozitive dacă și numai dacă are loc inegalitatea de mai jos:

$$(I) : \quad a > \max\{2c_1 - c_2, 2c_2 - c_1\}.$$

Liniarizând în vecinătatea fiecărui punct de echilibru și analizând ecuațiile caracteristice corespunzătoare (formulate cu ajutorul transformatorilor Laplace ale nucleelor  $k_i$ ), am obținut următorul rezultat:

**Propoziția 1.** Dacă inegalitatea (I) are loc, punctele de echilibru  $E_1$ ,  $E_2$  și  $E_3$  ale sistemului (8) sunt instabile, indiferent de alegerea nucleelor de întârziere  $k_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Utilizând Teorema lui Rouché, am obținut următorul rezultat:

**Propoziția 2.** Dacă inegalitatea (I) are loc și  $k_1(t) = k_4(t) = \delta(t)$  (adică întârzieri apar doar în termenii ce descriu influența competitorului în cele două ecuații ale sistemului), punctul de echilibru  $E_4$  al sistemului (8) este asimptotic stabil, indiferent de alegerea nucleelor de întârziere  $k_i$ ,  $i = \overline{2, 3}$ .

Toate aceste rezultate generalizează rezultate obținute anterior (Matsumoto, A., & Szidarovszky, F. (2015)), oferind de asemenea și demonstrații mai simple și mai elegante. În cele ce urmează, în etapa finală, ne propunem să investigăm stabilitatea punctului de echilibru  $E_4$ , precum și apariția fenomenului de bifurcație de tip Hopf în vecinătatea acestui echilibru, considerând diverse scenarii:

- nuclee de întârziere egale:  $k_i(t) = k(t)$ ,  $i = \overline{1,4}$ ;
- întârzieri prezente doar în prima ecuație a sistemului:  $k_3(t) = k_4(t) = \delta(t)$ .

#### A.3.3 Realizarea unor simulări numerice pentru a valida rezultatele teoretice obținute.

## REZULTATE

Activitățile realizate pentru îndeplinirea obiectivelor acestui proiect s-au concretizat prin redactarea în formă finală a următoarelor lucrări științifice (anexate):

1. E. Kaslik, M. Neamțu. "Dynamics of a tourism sustainability model with distributed delay" - lucrare aflată în recenzie, Applied Mathematical Modelling. (Anexa 1)
2. E. Kaslik, M. Neamțu. "Bifurcation analysis of a time-delayed tourism model" - lucrare trimisă spre recenzie, Analele AOSR. (Anexa 2)
3. E. Kaslik, M. Neamțu, A. Rădulescu. "A time-delay nonlinear model of dopamine-modulated prefrontal-limbic interactions in schizophrenia". Abstract extins, acceptat pentru prezentare la conferința NODYCON 2019, Roma, Italia. (Anexa 3)

## REFERENCES

- Afsharnezhad, Z., Dadi, Z., & Monfared, Z. (2017). Profitability and sustainability of a tourism-based social-ecological dynamical system by bifurcation analysis (ENG).
- Bignami, F., & Agliari, A. (2006). A Cournot duopoly model with complementary goods: multistability and complex structures in the basins of attraction.
- Campbell, S., Jessop, R. (2009). Approximating the stability region for a differential equation with a distributed delay. Mathematical Modeling of Natural Phenomena 4(02), 1 – 27, (2009)
- Casagrandi, R., & Rinaldi, S. (2002). A theoretical approach to tourism sustainability. Conservation ecology 6(1), 2002.
- Elsadany, A. A., & Matouk, A. E. (2014). Dynamic Cournot duopoly game with delay. Journal of Complex Systems, 2014.
- Gao, Y. H., Liu, B., & Feng, W. (2014). Bifurcations and chaos in a nonlinear discrete time Cournot duopoly game. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 30(4), 951-964.
- Jessop, R., Campbell, S.A. (2010). Approximating the stability region of a neural network with a general distribution of delays. Neural Networks 23(10), 1187–1201, (2010)
- Lacitignola, D., Petrosillo, I., Cataldi, M., & Zurlini, G. (2007). Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. Ecological Modelling, 206(1-2), 191-204.
- Matsumoto, A., & Szidarovszky, F. (2015). Delay dynamics of a Cournot game with heterogeneous duopolies. Applied Mathematics and Computation, 269, 699-713.
- Pecora, N., & Sodini, M. (2018). A heterogenous Cournot duopoly with delay dynamics: Hopf bifurcations and stability switching curves. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 58, 36-46.
- Radulescu, A. R., & Mujica-Parodi, L. R. (2008). A systems approach to prefrontal-limbic dysregulation in schizophrenia. Neuropsychobiology, 57(4), 206-216.

- Radulescu, A. (2008). Schizophrenia parameters game?. Journal of theoretical biology, 254(1), 89-98.
- Radulescu, A. (2009). A multi-etiiology model of systemic degeneration in schizophrenia. Journal of theoretical biology, 259(2), 269-279.
- Radulescu, A. R., & Mujica-Parodi, L. R. (2009). A principal component network analysis of prefrontal-limbic functional magnetic resonance imaging time series in schizophrenia patients and healthy controls. Psychiatry Research: Neuroimaging, 174(3), 184-194.
- Radulescu, A. R., Rubin, D., Strey, H. H., & MujicaParodi, L. R. (2012). Power spectrum scale invariance identifies prefrontal dysregulation in paranoid schizophrenia. Human brain mapping, 33(7), 1582-1593.
- Russu, P. (2009). Hopf bifurcation in a environmental defensive expenditures model with time delay. Chaos, Solitons and Fractals 42(5), 3147-3159
- Russu, P. (2012). On the optimality of limit cycle in nature based tourism. International Journal of Pure and Applied Mathematics 78(1), 49-64
- Yuan, Y., Belair, J. (2011). Stability and hopf bifurcation analysis for functional differential equation with distributed delay. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 10(2), 551-581 (2011)
- Zhao, L., Liu, X., & Ji, N. (2017). Complexity Analysis of a Triopoly Cooperation-Competition Game Model in Convergence Product Market. Mathematical Problems in Engineering, 2017.
- Wei, W., Alvarez, I., & Martin, S. (2013). Sustainability analysis: Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems. Ecological Modelling, 251, 103-113.

Data: 30.11.2018

Prof. Dr. Habil. Mihaela Neamțu

