

Raport final de activitate - 30.11.2018
Conf. Dr. Habil. Eva Kaslik

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spații Banach
Director: Prof. Univ. Dr. Mihail MEGAN *Eva Kaslik*

INTRODUCERE. OBIECTIVE GENERALE.

Obiectivele principale pe care le-am avut în vedere în cadrul acestui proiect sunt:

- O.1 Descrierea unor modele matematice pentru diferite procese economice și biologice precum: cooperarea și competiția mai multor jucători pe o piață, managementul sustenabil al unei zone turistice, transmiterea informației prin axonul unui neuron biologic, dereglațiile sistemiche în schizofrenie, etc.
- O.2 Studiul proprietăților de stabilitate și fenomenele de bifurcație ce apar în anumite sisteme dinamice descrise de ecuații diferențiale cu întârzieri sau ecuații cu derivate fraționare, având în vedere aplicații în economie și biologie, cu precădere în contextul menționat mai sus.
- O.3 Efectuarea unor simulări numerice pentru validarea rezultatelor teoretice obținute.

Considerăm că toate obiectivele prevăzute au fost îndeplinite cu succes, pe baza activităților din planul de cercetare descris în cele ce urmează.

PLANUL DE CERCETARE

În cadrul acestui proiect de cercetare, colaborând cu Prof. Dr. Mihaela Neamțu, am investigat următoarele tematici:

TEMA 1. Cooperarea și competiția mai multor jucători pe o piață

Activități realizate:

- A.1.1 Studiul literaturii de specialitate existente (articole relevante): [1, 2, 3, 4, 5, 6].
- A.1.2 Conceperea unui model matematic cu întârzieri distribuite, ce descrie **cooperarea și competiția mai multor jucători pe piață**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) \left[a - c_1 - 2b \int_{-\infty}^t x(s)k_1(t-s)ds - b \int_{-\infty}^t y(s)k_2(t-s)ds \right] \\ \dot{y}(t) = \beta y(t) \left[a - c_2 - b \int_{-\infty}^t x(s)k_3(t-s)ds - 2b \int_{-\infty}^t y(s)k_4(t-s)ds \right] \end{cases} \quad (1)$$

unde parametrii sunt reali și pozitivi, iar nucleele $k_i(t)$ reprezintă densități de probabilitate cu media τ_i , $i = \overline{1,4}$. Acest model generalizează modelele investigate în [4], considerând întârzieri distribuite generale, pentru o modelare mai corectă a fenomenului real.

A.1.3 Investigarea unor condiții suficiente în termeni de parametri sistemului (1) care garantează pozitivitatea soluțiilor pentru condiții inițiale pozitive.

A.1.4 Analiza stabilității celor patru puncte de echilibru:

$$E_1 = (0, 0), \quad E_2 = \left(0, \frac{a - c_2}{2b}\right), \quad E_3 = \left(\frac{a - c_1}{2b}, 0\right), \quad E_4 = \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3b}\right).$$

Toate aceste puncte de echilibru au componente pozitive dacă și numai dacă are loc inegalitatea de mai jos:

$$(I) : \quad a > \max\{2c_1 - c_2, 2c_2 - c_1\}.$$

Liniarizând în vecinătatea fiecărui punct de echilibru și analizând ecuațiile caracteristice corespunzătoare (formulate cu ajutorul transformatorilor Laplace ale nucleelor k_i), am obținut următorul rezultat:

Propoziția 1. Dacă inegalitatea (I) are loc, punctele de echilibru E_1 , E_2 și E_3 ale sistemului (1) sunt instabile, indiferent de alegerea nucleelor de întârziere k_i , $i = \overline{1, 4}$.

Utilizând Teorema lui Rouché, am obținut următorul rezultat:

Propoziția 2. Dacă inegalitatea (I) are loc și $k_1(t) = k_4(t) = \delta(t)$ (adică întârzieri apar doar în termenii ce descriu influența competitorului în cele două ecuații ale sistemului), punctul de echilibru E_4 al sistemului (1) este asymptotic stabil, indiferent de alegerea nucleelor de întârziere k_i , $i = \overline{2, 3}$.

Toate aceste rezultate generalizează rezultatele obținute anterior [4], oferind de asemenea și demonstrații mai simple și mai elegante.

A.1.5 Investigarea stabilității punctului de echilibru E_4 , precum și fenomenului de bifurcație de tip Hopf în vecinătatea acestui echilibru, considerând diverse scenarii:

- nuclee de întârziere egale: $k_i(t) = k(t)$, $i = \overline{1, 4}$;
- întârzieri prezente doar în prima ecuație a sistemului: $k_3(t) = k_4(t) = \delta(t)$.

A.1.6 Realizarea unor simulări numerice pentru a valida rezultatele teoretice obținute.

TEMA 2. Managementul sustenabil al unei zone turistice

Activități realizate:

A.2.1 Studiul literaturii de specialitate existente (articole reprezentative): [7, 8, 9, 10, 11].

A.2.2 Formularea unui model matematic ce constă dintr-un sistem de trei ecuații diferențiale cu întârzieri distribuite, pentru a modela această tematică:

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = T(t) \left[A_1(E(t)) + A_2 \left(\frac{C(t)}{T(t)+1} \right) - \alpha T(t) - a \right] \\ \dot{E}(t) = E(t) \left[r \left(1 - \frac{E(t)}{K} \right) - \eta C(t) - \gamma \int_{-\infty}^t T(s)h(t-s)ds \right] \\ \dot{C}(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^t T(s)h(t-s)ds - \delta C(t) \end{cases} \quad (2)$$

unde $T(t)$ este numărul de turiști la momentul t într-o anumită locație, $E(t)$ reprezintă calitatea mediului înconjurător, $C(t)$ fluxul de capital destinat pentru activitățile turistice, $A_1(E)$ este atractivitatea mediului, $A_2 \left(\frac{C}{T+1} \right)$ atractivitatea infrastructurii per capita. În plus, toți parametri sunt reali și pozitivi. Modelul (2) reprezintă o generalizare a modelului matematic cu întârzieri discrete explorat în [9]. Utilizarea întârzierilor distribuite s-a dovedit a fi mai riguroasă în modelarea fenomenelor în care estimarea întârzierilor care apar este dificilă sau inexactă [12, 13, 14].

A.2.3 Demonstrația pozitivității soluțiilor sistemului (2) pentru condiții inițiale pozitive.

A.2.4 Analiza stabilității locale și a fenomenelor de bifurcație în vecinătatea celor patru puncte de echilibru al sistemului (2). Investigarea stabilității locale pentru fiecare echilibru în parte a fost realizată prin construcția sistemului liniarizat și analiza ecuației caracteristice rezultante. Am arătat că punctele de echilibru care au cel puțin o componentă nulă sunt instabile indiferent de alegerea nucleului de întârziere $h(t)$, în cazul în care parametrii sistemului îndeplinește anumite condiții ușor interpretabile. Pe de altă parte, echilibrul cu componente strict pozitive este asimptotic stabil doar pentru o întârziere medie suficient de mică. Valoarea critică a întârzierii medii unde echilibrul pozitiv își pierde stabilitatea asimptotică corespunde unei bifurcații Hopf supercritice. În cazul unei întârzieri discrete, analiza criticalității bifurcației de tip Hopf s-a realizat prin reducerea la varietatea centrală și determinarea formei normale.

A.2.5 Realizarea unor simulări numerice pentru a valida rezultatele teoretice obținute.

A.2.6 Redactarea în formă finală a două lucrări științifice (anexate).

TEMA 3. Transmiterea informației prin axonul unui neuron biologic

Activități realizate:

A.3.1 Studiu critic al literaturii de specialitate: [15, 16, 17, 18]

A.3.2 Investigarea modelului de ordin fracționar de tip conductanță ce descrie **transmiterea informației prin axonul unui neuron biologic**:

$$\begin{cases} {}^C D^{q_1} v(t) = I - I(v, w) \\ {}^C D^{q_2} w(t) = \phi(w_\infty(v) - w) \end{cases} \quad (3)$$

unde $v(t)$ reprezintă potențialul membranei neuronale, $w(t)$ este o variabilă de recuperare, iar $q_1, q_2 \in (0, 1)$ reprezintă ordinea derivatelor fracționare de tip Caputo. Modelarea acestor fenomene de la nivelul membranei neuronale se bazează atât pe rezultate experimentale obținute recent [19, 20], cât și pe rezultate numerice raportate în [21, 22] pentru modele de ordin fracționar de tip Hodgkin-Huxley.

A.3.3 Studiu existenței echilibrelor sistemului (3). Numărul echilibrelor depinde de valoarea parametrului I precum și de forma funcției $I(w, w)$ luată în considerare, existând maxim trei echilibre pentru o valoare fixă a parametrului I .

A.3.4 Obținerea unor rezultate ce privesc condiții necesare și suficiente pentru stabilitatea asimptotică și instabilitatea sistemelor liniare bidimensionale de ecuații cu derivate fracționare de tip Caputo, în colaborare cu Drd. Oana Brandibur (Universitatea de Vest din Timișoara). Aceste rezultate extind cele prezentate în [23, 24].

A.3.5 Rezultate teoretice obținute la [A.3.4] au fost aplicate la investigarea modelului (3). Rezultatele obținute au fost incluse într-un capitol invitat spre publicare în volumul "Current Trends in Fractional Calculus and Fractional Differential Equations" (editor: Prof. Varsha Gejji) ce va fi publicat la editura Springer. Capitolul finalizat în urma celei de-a doua runde de recenzii este anexat.

TEMA 4. Dereglări sistemică în schizofrenie

Activități realizate:

A.4.1 Studiu literaturii existente (articole relevante enumerate mai jos) referitoare la descrierea matematică a proceselor economice ce privesc dereglații sistemică în schizofrenie: [25, 26, 27, 28, 29];

A.4.2 Conceperea unui model matematic cu întârziere discretă:

$$\begin{cases} \dot{a}(t) = -\mu_1 a - k_1 p - k_1 h + I \\ \dot{p}(t) = k_2 a - g(\delta_\tau)p + \frac{\gamma_2}{a_1 C + 1} h \\ \dot{h}(t) = g(\delta_\tau^2)p - a_2 C \\ \dot{\delta}(t) = \xi g(\delta)(p + h - a) \end{cases} \quad (4)$$

unde variabilele a , p , h , δ reprezintă activarea temporală a amigdalei, hipocampusului, cortexului prefrontal și respectiv a sistemului dopaminei, iar $\delta_\tau(t) = \delta(t - \tau)$, parametri fiind reali și pozitivi. Acest model extinde modelul fără întârzieri introdus în [26], scopul fiind de a clarifica efectul întârzierii ce apare în influența dopaminei asupra deregulațiilor sistemice.

A.4.3 Investigarea stabilității punctului de echilibru al sistemului (4) precum și a fenomenului de bifurcație Hopf ce are loc în vecinătatea acestuia, în funcție de valoarea întârzierii τ .

A.4.4 Realizarea unor simulări numerice pentru verificarea rezultatelor teoretice obținute.

A.4.5 Redactarea unei lucrări în formă finală ce va fi submisă pentru Proceeding-ul conferinței NODYCON 2019 (Roma, Italia), publicat la editura Springer. Abstractul extins al lucrării este anexat.

DISEMINARE. PUBLICAȚII

Activitățile realizate pentru îndeplinirea obiectivelor acestui proiect s-au concretizat prin redactarea în formă finală a următoarelor lucrări științifice (anexate):

1. E. Kaslik, M. Neamțu. "Dynamics of a tourism sustainability model with distributed delay" - lucrare aflată în recenzie, Applied Mathematical Modelling.
2. E. Kaslik, M. Neamțu. "Bifurcation analysis of a time-delayed tourism model" - lucrare trimisă spre publicare, Analele AOSR.
3. O. Brandibur, E. Kaslik. "Stability analysis of two-dimensional incommensurate systems of fractional-order differential equations". Acceptată spre publicare în volumul "Current Trends in Fractional Calculus and Fractional Differential Equations" (editor: Prof. Varsha Gejji), Springer.
4. E. Kaslik, M. Neamțu, A. Rădulescu. "A time-delay nonlinear model of dopamine-modulated prefrontal-limbic interactions in schizophrenia". Abstract extins, acceptat pentru prezentare la conferința NODYCON 2019, Roma, Italia.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Fernando Bignami and Anna Agliari. A Cournot duopoly model with complementary goods: multistability and complex structures in the basins of attraction. 2006.
- [2] A.A. Elsadany and A.E. Matouk. Dynamic Cournot duopoly game with delay. *Journal of Complex Systems*, 2014, 2014.
- [3] Ying-hui Gao, Bing Liu, and Wei Feng. Bifurcations and chaos in a nonlinear discrete time Cournot duopoly game. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 30(4):951–964, 2014.
- [4] Akio Matsumoto and Ferenc Szidarovszky. Delay dynamics of a Cournot game with heterogeneous duopolies. *Applied Mathematics and Computation*, 269:699–713, 2015.
- [5] Liming Zhao, Xiaofeng Liu, and Ning Ji. Complexity analysis of a triopoly cooperation-competition game model in convergence product market. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017.

- [6] Nicolò Pecora and Mauro Sodini. A heterogenous Cournot duopoly with delay dynamics: Hopf bifurcations and stability switching curves. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 58:36–46, 2018.
- [7] Renato Casagrandi and Sergio Rinaldi. A theoretical approach to tourism sustainability. *Conservation Ecology*, 6(1), 2002.
- [8] Deborah Lacitignola, Irene Petrosillo, M Cataldi, and Giovanni Zurlini. Modelling socio-ecological tourism-based systems for sustainability. *Ecological Modelling*, 206(1):191–204, 2007.
- [9] Paolo Russu. Hopf bifurcation in a environmental defensive expenditures model with time delay. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(5):3147–3159, 2009.
- [10] Wei Wei, Isabelle Alvarez, and Sophie Martin. Sustainability analysis: Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems. *Ecological Modelling*, 251:103–113, 2013.
- [11] Zahra Afsharnezhad, Zohreh Dadi, and Zahra Monfared. Profitability and sustainability of a tourism-based social-ecological dynamical system by bifurcation analysis (eng). 2017.
- [12] Hitay Özbay, Catherine Bonnet, and Jean Clairambault. Stability analysis of systems with distributed delays and application to hematopoietic cell maturation dynamics. In *CDC*, pages 2050–2055, 2008.
- [13] S.A. Campbell and R. Jessop. Approximating the stability region for a differential equation with a distributed delay. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 4(02):1–27, 2009.
- [14] R. Jessop and Sue Ann Campbell. Approximating the stability region of a neural network with a general distribution of delays. *Neural Networks*, 23(10):1187–1201, 2010.
- [15] A. Hodgkin and A. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, 117:500–544, 1952.
- [16] Catherine Morris and Harold Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophysical Journal*, 35(1):193, 1981.
- [17] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1:445–466, 1961.
- [18] Wondimu Teka, Toma M Marinov, and Fidel Santamaria. Neuronal spike timing adaptation described with a fractional leaky integrate-and-fire model. *PLoS Comput Biol*, 10(3):e1003526, 2014.
- [19] T.J. Anastasio. The fractional-order dynamics of brainstem vestibulo-oculomotor neurons. *Biological Cybernetics*, 72(1):69–79, 1994.
- [20] B.N. Lundstrom, M.H. Higgs, W.J. Spain, and A.L. Fairhall. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons. *Nature Neuroscience*, 11(11):1335–1342, 2008.
- [21] Seth H Weinberg. Membrane capacitive memory alters spiking in neurons described by the fractional-order Hodgkin-Huxley model. *PloS one*, 10(5):e0126629, 2015.
- [22] Wondimu Teka, David Stockton, and Fidel Santamaria. Power-law dynamics of membrane conductances increase spiking diversity in a Hodgkin-Huxley model. *PLoS Comput Biol*, 12(3):e1004776, 2016.
- [23] Oana Brandibur and Eva Kaslik. Stability properties of a two-dimensional system involving one caputo derivative and applications to the investigation of a fractional-order Morris-Lecar neuronal model. *Nonlinear Dynamics*, 90(4):2371–2386, 2017.

- [24] Oana Brandibur and Eva Kaslik. Stability of two-component incommensurate fractional-order systems and applications to the investigation of a FitzHugh-Nagumo neuronal model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2018.
- [25] Anca Rădulescu and LR Mujica-Parodi. A systems approach to prefrontal-limbic dysregulation in schizophrenia. *Neuropsychobiology*, 57(4):206–216, 2008.
- [26] Anca Rădulescu. Schizophrenia parameters game? *Journal of Theoretical Biology*, 254(1):89–98, 2008.
- [27] Anca Rădulescu. A multi-etiiology model of systemic degeneration in schizophrenia. *Journal of Theoretical Biology*, 259(2):269–279, 2009.
- [28] Anca Rădulescu and Lilianne R Mujica-Parodi. A principal component network analysis of prefrontal-limbic functional magnetic resonance imaging time series in schizophrenia patients and healthy controls. *Psychiatry Research: Neuroimaging*, 174(3):184–194, 2009.
- [29] Anca Rădulescu, Denis Rubin, Helmut H Strey, and Lilianne R Mujica-Parodi. Power spectrum scale invariance identifies prefrontal dysregulation in paranoid schizophrenia. *Human Brain Mapping*, 33(7):1582–1593, 2012.

Data: 28.11.2018

Conf. Dr. Habil. Eva Kaslik

