Raport

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa SASU

Titlul proiectului: Comportări asimptotice pentru sisteme dinamice în spaţii Banach

Director: Prof. univ. Dr. Emerit Mihail MEGAN

În cadrul proiectului de faţă, studiul a fost realizat în colaborare cu Prof. univ. dr. Bogdan Sasu şi s-a concretizat în articolul [28], elaborat în vederea publicării în *Annals of the Academy of Romanian Scientists - Series on Mathematics and Its Application*.

Studiul vizează proprietatea de dichotomie exponenţială uniformă a sistemelor dinamice neautonome definite pe întreaga axă, în spaţii Banach, în contextul celor mai noi rezultate obţinute pentru dichotomia şi trichotomia sistemelor dinamice şi a progresului înregistrat în ultimii ani în această direcţie (a se vedea [19]-[27] şi referinţele incluse).

O clasă specială de metode utilizate în studiul proprietăţilor asimptotice ale sistemelor dinamice o reprezintă metodele de tip Perron. Teoria are originea în lucrarea de pionierat a lui Perron [17], iar metoda constă în caracterizarea unei proprietăţi asimptotice a unui sistem dinamic în limbaj de solvabilitate a unui sistem cu control bine ales sau în limbaj de diverse proprietăţi (surjectivitate/inversabilitate, Fredholm, proprietăţi spectrale) ale unor operatori de tip intrare-ieşire definiţi între anumite spaţii (a se vedea [1]-[30] şi referinţele incluse). Problematica Perron a avut un impact major asupra dezvoltării teoriei asimptotice a sistemelor dinamice în spaţii infinit dimensionale. O parte substanţială a studiilor cu metode de tip Perron a fost dedicată diverselor proprietăţi de dichotomie pentru sisteme dinamice (a se vedea Barreira &Valls [2], Barreira, Dragičević & Valls [3], Chow & Leiva [6], Huy & Minh [9], Huy [10], Megan, Sasu & Sasu [11], [12], Minh & Huy [15], Minh [16], Sasu & Sasu [19]-[21], [25], [26], Sasu [22], Sasu [24]). Mai mult, metodele de tip Perron sunt deosebit de importante în studiul celei mai complexe proprietăţi asimptotice: trichotomia exponenţială (a se vedea Elaydi & Hajék [7], Elaydi & Janglajew [8], Sasu & Sasu [26], [27] şi referinţele indicate). O aplicaţie spectaculoasă a metodelor de tip Perron este cea în care prin intermediul tehnicilor de tip intrare-ieşire se pot deduce informaţii despre comportarea unui sistem dinamic, pornind de la proprietatea omoloagă în timp discret (a se vedea de exemplu Megan, Sasu & Sasu [12], [13], Sasu & Sasu [25] pentru cazul sistemelor pe semiaxă, Sasu & Sasu [26] pentru cazul trichotomiei exponenţiale). Studiul din cadrul proiectului se înscrie în această problematică şi prezintă o metodă de (re)construcţie a dichotomiei exponenţiale uniforme a sistemelor dinamice neautonome în spaţii Banach, în timp continuu, pornind de la dichotomia exponenţială a unui sistem dinamic discret asociat.

Fie X un spaţiu Banach, real sau complex şi $\{A(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ o famlie de operatori liniari şi mărginiţi pe X. Se consideră sistemul discret neautonom

$$(A) \qquad x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

În debut se demonstrează că dacă sistemul (A) are coeficienţi uniform mărginiţi şi este dichotomic în raport cu o familie de proiectori, atunci proiectorii sunt uniform mărginiţi ([28], Teorema 2 (i)). Apoi, se obţine o caracterizare pentru imaginea respectiv nucleul proiectorilor de dichotomie exponenţială, utilizând traiectorii mărginite ([28], Teorema 2 (ii), (iii)).

În continuare, se consideră sisteme neautonome în timp continuu, pe întreaga axă, descrise prin intermediul familiilor de evoluţie. Studiul vizează stabilirea conexiunilor dintre dichotomia exponenţială uniformă a unei familii de evoluţie pe axă şi dichotomia exponenţială uniformă a sistemului discret asociat. Metoda propusă utilizează proprietăţi de tip intrare-ieşire în raport cu un sistem cu control.

Presupunând că sistemul discret asociat unei familii de evoluţie este uniform exponenţial dichotomic, în prima etapă se stabilesc caracterizări pentru imaginile şi nucleele proiectorilor de dichotomie discretă în limbaj de traiectorii ale familiei de evoluţie ([28], Teorema 3 (i), (ii)) şi anumite proprietăţi de stabilitate şi de expansivitate ale familiei de evoluţie ([28], Teorema 3 (iii), (iv)). Apoi, se obţin proprietăţi de închidere pentru subspaţiile stabile şi instabile ([28], Teorema 4 (ii), (iii)). Metoda propusă arată modul în care se (re)construiesc proiectorii de dichotomie în timp real, pornind de la cei în timp discret. În final, deducem că dichotomia exponenţială uniformă a unei familii de evoluţie pe axă este echivalentă cu dichotomia exponenţială uniformă a sistemului discret asociat. De aici rezultă că proprietatea de dichotomie exponenţială în timp discret este suficientă pentru a reconstitui comportarea exponenţială dichotomică uniformă în timp continuu ([28], Teorema 5).

În ultima secţiune, se prezintă diverse aplicaţii pentru studiul dichotomiei exponenţiale uniforme a sistemelor neautonome modelate prin intermediul familiilor de evoluţie pe întreaga axă, exprimate prin intermediul admisibilităţii unei perechi arbitrare de spaţii Banach de şiruri ([28], Definiţia 8), care aparţin anumitor clase ([28], Teorema 6.) Rezultatele obţinute extind caracterizările discrete anterioare din literatură pentru dichotomia exponenţială uniformă a familiilor de evoluţie, în limbaj de admisibilitate cu spaţii de şiruri (a se vedea [28] şi referinţele incluse).

În plus, o altă lucrare care se va trimite spre publicare sub afilierea Academiei Oamenilor de Ştiinţă din România este [29]. Aceasta este dedicată unui studiu amplu asupra comportărilor dichotomice neuniforme ale sistemelor neautonome într-un spaţiu Banach X definite pe întreaga axă ([29], Definiţia 2.2). Se notează cu $C(\mathbb{R}, X)$ unul dintre spaţiile: spaţiul funcţiilor continue şi mărginite, spaţiul funcţiilor continue cu limită zero la $-\infty$, spaţiul funcţiilor continue cu limită zero la ∞ sau spaţiul funcţiilor continue cu limită zero la $\pm\infty$, şi respectiv se notează cu $I(\mathbb{R}, X)$ o intersecţie finită de spaţii de tip $L^p(\mathbb{R}, X)$ cu spaţiul funcţiilor continue cu limite zero la $\pm\infty$. Rezultatul central ([29], Teorema 2.4) demonstrează că admisibilitatea perechii $(C(\mathbb{R}, X), I(\mathbb{R}, X))$ pentru o familie de evoluţie $\mathcal{U} = \{U(t,s)\}_{t\geq s}$ este o condiţie suficientă pentru dichotomia exponenţială neuniformă a acesteia. Printr-un exemplu se arată că admisibilitatea acestei perechi nu este şi necesară pentru dichotomia neuniformă pe axă ([29], Exemplul 3.1). În continuare, se deduc consecinţele în cazul uniform, obţinându-se o caracterizare pentru dichotomia exponenţială uniformă a familiilor de evoluţie în termeni de admisibilitate a perechii $(C(\mathbb{R}, X), I(\mathbb{R}, X))$ ([29], Teorema 3.1).

Prof. univ. dr. Adina Luminiţa SASU

Sasu

Data: 30.11.2018

BIBLIOGRAFIE

[1] B. Aulbach, N. Van Minh, *The concept of spectral dichotomy for linear difference equations II*, J. Difference Equ. Appl. **2** (1996), 251–262.

[2] L. Barreira, C. Valls, *Nonuniform exponential dichotomies and admissibility*, Discrete Dynam. Contin. Systems **30** (2011), 39–53.

[3] L. Barreira, D. Dragičević, C. Valls, *Admissibility and Hyperbolicity*, Springer Briefs in Mathematics, Springer, 2018.

[4] L. Berezansky, E. Braverman, *On exponential dichotomy, Bohl-Perron type theorems and stability of difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **304** (2005), 511-530.

[5] E. Braverman, I. M. Karabash, *Bohl-Perron-type stability theorems for linear difference equations with infinite delay*, J. Difference Equ. Appl. **18** (2012), 909–939.

[6] S. N. Chow, H. Leiva, *Existence and roughness of the exponential dichotomy for linear skew-product semiflows in Banach spaces*, J. Differential Equations **120** (1995), 429-477.

[7] S. Elaydi, O. Hájek, *Exponential trichotomy of differential systems*, J. Math. Anal. Appl. **129** (1988), 362–374.

[8] S. Elaydi, K. Janglajew, *Dichotomy and trichotomy of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **3** (1998), 417-448.

[9] N. T. Huy, N. Van Minh, *Exponential dichotomy of difference equations and applications to evolution equations on the half-line*, Comput. Math. Appl. **42** (2001), 301-311.

[10] N. T. Huy, *Exponential dichotomy of evolution equations and admissibility of function spaces on a half-line*, J. Funct. Anal. **235** (2006), 330-354.

[11] M. Megan, B. Sasu, A. L. Sasu, *On nonuniform exponential dichotomy of evolution operators in Banach spaces*, Integral Equations Operator Theory **44** (2002), 71-78.

[12] M. Megan, A. L. Sasu, B. Sasu, *Discrete admissibility and exponential dichotomy for evolution families*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 383-397.

[13] M. Megan, B. Sasu, A. L. Sasu, *Exponential expansiveness and complete admissibility for evolution families*, Czech. Math. J. **54** (2004), 739-749.

[14] N. Van Minh, F. Räbiger, R. Schnaubelt, *Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half line*, Integral Equations Operator Theory **32** (1998), 332-353.

[15] N. Van Minh, N. T. Huy, *Characterizations of dichotomies of evolution equations on the half-line*, J. Math. Anal. Appl. **261** (2001), 28-44.

[16] N. Van Minh, *Asymptotic behavior of individual orbits of discrete systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3025-3035.

[17] O. Perron, *Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleischungen*, Math. Z. **32** (1930), 703–728.

[18] B. Sasu, A. L. Sasu, *Stability and stabilizability for linear systems of difference equations*, J. Difference Equ. Appl. **10** (2004), 1085-1105.

[19] A. L. Sasu, B. Sasu, *Exponential dichotomy and admissibility for evolution families on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **13** (2006), 1-26.

[20] A. L. Sasu, B. Sasu, *Discrete admissibility, ℓ^p-spaces and exponential dichotomy on the real line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **13** (2006), 551-561.

[21] B. Sasu, A. L. Sasu, *Exponential dichotomy and (ℓ^p, ℓ^q)-admissibility on the half-line*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), 397-408.

[22] B. Sasu, *Uniform dichotomy and exponential dichotomy of evolution families on the half-line*, J. Math. Anal. Appl. **323** (2006), 1465-1478.

[23] B. Sasu, *New criteria for exponential expansiveness of variational difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), 287-297.

[24] A. L. Sasu, *Exponential dichotomy and dichotomy radius for difference equations*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 906–920.

[25] B. Sasu, A. L. Sasu, *On the dichotomic behavior of discrete dynamical systems on the half-line*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **33** (2013), 3057–3084.

[26] A. L. Sasu, B. Sasu, *Discrete admissibility and exponential trichotomy of dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), 2929–2962.

[27] A. L. Sasu, B. Sasu, *Exponential trichotomy and (r, p)-admissibility for discrete dynamical systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **22** (2017), 3199-3220.

[28] A. L. Sasu, B. Sasu, *On some dichotomy properties of dynamical systems on the whole line*, to be submitted to Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.

[29] A. L. Sasu, B. Sasu, *On nonuniform dichotomic behavior of nonautonomous systems - amissibility methods and applications*, work in progress.

[30] L. Zhou, W. Zhang, *Admissibility and roughness of nonuniform exponential dichotomies for difference equations*, J. Funct. Anal. 271 (2016), 1087-1129.