

# Aplicații ale seriei Lambert și ale funcției theta în teoria numerelor

Multe întrebări care implică divizorii unui număr natural au fost studiate de milenii și subliniază cele mai profunde probleme nerezolvate în teoria numerelor și în domenii conexe. Studiul partițiilor, adică modalitățile de a scrie un număr întreg pozitiv ca o sumă de numere întregi pozitive, este mult mai recent, Euler fiind considerat fondatorul acestui subiect. Istoria ambelor subiecte este bogată și interesantă.

Cele două ramuri importante ale teoriei numerelor, aditivă și multiplicativă, se dovedesc a fi legate în multe moduri interesante. Conexiuni dintre divizorii și partițiile unui număr au fost studiate de câțiva matematicieni, dar probabil cele mai vechi investigații se datorează lui MacMahon între anii 1910 și 1920. Astfel de conexiuni apar ulterior și în lucrările lui Ramanujan.

Chiar dacă există un număr important de rezultate care conectează teoria divizorilor cu cea a partițiilor, acestea sunt oarecum împrăștiate în abordarea lor. Se pare că există multe conexiuni, în special în termeni de convoluții, care implică funcții importante din teoria aditivă și teoria multiplicativă a numerelor, nedescoperite până acum.

Propunem continuarea studiului conexiunilor dintre divizori și partiții cu scopul de a identifica firele comune, sperând să se obțină o abordare unitară a relațiilor care implică funcții din teoria aditivă și teoria multiplicativă a numerelor. Ideea unei abordări unitare pentru o clasă mare de funcții din teoria aditivă și teoria multiplicativă a numerelor își are originea în articolul *The Lambert series factorization theorem* pe care l-am publicat recent în *The Ramanujan Journal*. Motivată de faptul că un caz particular al funcției theta apare în factorizarea seriei Lambert, vom investiga noi proprietăți ale funcției theta a lui Ramanujan cu implicații în teoria numerelor.

# 1 Obiective

- stabilirea unor conexiuni noi între funcții din teoria aditivă a numerelor și funcții din teoria multiplicativă a numerelor considerând seria Lambert și funcția theta a lui Ramanujan
- factorizarea seriei Lambert generalizate
- stabilirea unor noi congruențe de tip Ramanujan pentru funcții din teoria aditivă a numerelor
- dezvoltarea unei metode generale pentru demonstrarea inegalităților omogene liniare care implică funcții din teoria aditivă a numerelor
- descoperirea unor inegalități noi care implică funcții din teoria aditivă a numerelor
- obținerea unor interpretări combinatoriale pentru inegalități omogene liniare care implică funcții din teoria aditivă a numerelor
- descoperirea și demonstrarea unor noi relații liniare de recurență eficiente pentru calculul valorilor unor funcții importante din teoria aditivă a numerelor

# 2 Rezultate intermediare

- Exprimarea funcției de partiție  $p(n)$  cu ajutorul indicatorului lui Euler
- Exprimarea funcției de partiție  $p(n)$  cu ajutorul funcției lui Möbius
- Obținerea unor conexiuni între funcția lui Pillai din teoria multiplicativă a numerelor și funcția de partiție  $p(n)$
- Obținerea unor interpretări combinatoriale pentru două identități ale lui Gauss

## 3 Rezultate finale

### 3.1 Faza I

- Interpretări combinatoriale ale identității  $q$ -Vandermonde
- Teorema lui Stanley și identități cu partiții
- Generarea funcțiilor aritmetice cu ajutorul seriei Lambert factorizate
- O colecție de relații liniare recurente pentru numărul partițiilor în părți impare sau congruente cu  $\pm 2 \pmod{10}$

### 3.2 Faza II

- Demonstrații combinatoriale pentru două teoreme cu serii theta trunchiate publicate recent
- Teoreme de factorizare pentru seria Lambert generalizată
- Serii theta secționare și numere poligonale
- Partiții cu cea mai mică parte și cea mai mică diferență fixate
- O metodă generală pentru demonstrarea inegalităților liniare omogene cu partiții

## 4 Număr de articole publicate (ISI sau BDI)

Până în acest moment am publicat 52 de articole indexate ISI și 12 articole indexate BDI.

În cadrul acestui proiect intenționez să public un număr de 8 articole indexate ISI și 2 articole indexate BDI.

Rezultatele obținute în demonstrarea inegalităților liniare omogene cu partiții vor fi prezentate la conferința “Combinatory Analysis 2018” care se va desfășura la Penn State University, USA în perioada 21-24 iunie 2018. Menționez faptul că am fost acceptat la această conferință în calitate de “speaker”.