

Raport științific

privind implementarea proiectului în perioada Decembrie 2022 – Iunie 2023

PROIECT DE CERCETARE

Buna-definire, rezultate de existență și caracterizare a soluțiilor pentru anumite probleme variaționale

DOMENIUL 10. TEHNICI INOVATIVE DE MODELARE MATEMATICĂ A SISTEMELOR FIZICE ȘI SOCIO-ECONOMICE

CONTRACT 44/14.04.2022

Director de proiect: SAVIN TREANȚĂ

Academia Oamenilor de Știință din România, 54 Splaiul Independenței, 050044
București, România

I. Abstract

Tema de cercetare, în care a fost înaintată propunerea de proiect, este unul dintre punctele importante și de actualitate ale comunității relevante de cercetare. Aceasta include metode de optimizare robustă și incertă, și teoria controlului optimal cu aplicații în inginerie, sisteme fizice și socio-economice. Distingem următoarele *obiective specifice*: (A) buna-definire, condiții de eficiență și rezultate de echivalență asociate cu noile clase de probleme variaționale; (B) introducerea unor probleme variaționale robuste modificate și criteriile de eficiență asociate de tip punct șă; (C) abordarea Lagrange-Hamilton-Jacobi și studiul soluțiilor robuste slabe ascuțite în problemele considerate; (D) eficacitatea și aplicațiile problemelor studiate.

II. Rezultate obținute

În cadrul acestui proiect, în perioada 05.12.2022-30.06.2023, au fost obținute următoarele rezultate:

A. Articole/cărți/capitole de carte publicate

- T. Saeed, W. Afzal, K. Shabbir, **S. Treanță**, M. De la Sen, *Some Novel Estimates of Hermite-Hadamard and Jensen Type Inequalities for (h_1, h_2) -Convex Functions Pertaining to Total Order Relation*, Mathematics, Vol. 10, No. 24, 4777, 2022; DOI: 10.3390/math10244777; WOS: 000904438300001; eISSN: 2227-7390.
- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *On some variational inequality constrained control problems*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2022, No. 1, 156, 2022; DOI: 10.1186/s13660-022-02895-w; WOS: 000898778100002; ISSN: 1029-242X.
- **S. Treanță**, *Advances in Optimization and Nonlinear Analysis* (Editor); ISBN 978-3-0365-4749-7 (hardback); ISBN 978-3-0365-4750-3 (PDF); MDPI Switzerland, 2022.
- T. Saeed, W. Afzal, M. Abbas, **S. Treanță**, M. De la Sen, *Some New Generalizations of Integral Inequalities for Harmonical cr - (h_1, h_2) -Godunova-Levin Functions and Applications*, Mathematics, Vol. 10, No. 23, 4540, 2022; DOI: 10.3390/math10234540; WOS: 000896895500001; eISSN: 2227-7390.

- Ritu, **S. Treanță**, D. Agarwal, G. Sachdev, *Robust Efficiency Conditions in Multiple-Objective Fractional Variational Control Problems*, Fractal and Fractional, Vol. 7, No. 1, 18, 2023; DOI: 10.3390/fractalfract7010018; WOS: 000915134100001; ISSN: 2504-3110.
- **S. Treanță**, *Necessary and sufficient optimality conditions for some robust variational problems*, Optimal Control, Applications & Methods, Vol. 44, No. 1, pp. 81-90, 2022; DOI: 10.1002/oca.2931; WOS: 000829755700001; ISSN: 0143-2087; eISSN: 1099-1514.
- W. Afzal, K. Shabbir, T. Botmart, **S. Treanță**, *Some new estimates of well known inequalities for (h_1, h_2) -Godunova-Levin functions by means of center-radius order relation*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 2, 3101-3119, 2023; DOI: 10.3934/math.2023160; WOS: 000885968000006; ISSN: 2473-6988.
- Preeti, P. Agarwal, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *Penalty approach for KT-pseudoinvex multidimensional variational control problems*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 3, 5687-5702, 2023; DOI: 10.3934/math.2023286; WOS: 000905180600002; ISSN: 2473-6988.
- **S. Treanță**, Y. Guo, *The study of certain optimization problems via variational inequalities*, Research in the Mathematical Sciences, Vol. 10, No. 1, 7, 2023; DOI: 10.1007/s40687-022-00372-w; WOS: 000919776900001; ISSN: 2522-0144.
- **S. Treanță**, *Results on the Existence of Solutions for Some Controlled Optimization Problems*, In: Debnath P., Srivastava H.M., Chakraborty K., Kumam P. (eds) *Advances in Number Theory and Applied Analysis*, pp. 327-342; DOI: 10.1142/9789811272608_0014; ISBN: 978-981-127-259-2; Chapman and Hall/CRC, 2023.
- **S. Treanță**, *Variational Problems and Applications*, Mathematics, Vol. 11, No. 1, 205, 2023; DOI: 10.3390/math11010205; WOS: 000911040400001; eISSN: 2227-7390.
- **S. Treanță**, T. Saeed, *Duality Results for a Class of Constrained Robust Nonlinear Optimization Problems*, Mathematics, Vol. 11, No. 1, 192, 2023; DOI: 10.3390/math11010192; WOS: 000910150300001; eISSN: 2227-7390.
- S.K. Sahoo, H. Alrweili, **S. Treanță**, Z.A. Khan, *New Fractional Integral Inequalities pertaining to Center-Radius (cr) -Ordered Convex Functions*, Fractal and Fractional, Vol. 7, No. 1, 81, 2023; DOI: 10.3390/fractalfract7010081; WOS: 000919932800001; ISSN: 2504-3110.
- K. Das, **S. Treanță**, T. Botmart, *Set-Valued Minimax Programming Problems under \setminus sigma-Arcwisely Connectivity*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 5, 11238-11258, 2023; DOI: 10.3934/math.2023569; WOS: 000949757600001; ISSN: 2473-6988.
- **S. Treanță**, *Variational Problems and Applications (Editor)*; ISBN 978-3-0365-6589-7 (hardback); ISBN 978-3-0365-6588-0 (PDF); MDPI Switzerland, 2023.
- F. Jarad, S.K. Sahoo, K.S. Nisar, **S. Treanță**, H. Emadifar, T. Botmart, *New stochastic fractional integral and related inequalities of Jensen-Mercer and Hermite-Hadamard-Mercer type for convex stochastic processes*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2023, No. 1, 51, 2023; DOI: 10.1186/s13660-023-02944-y; WOS: 000964904300001; ISSN: 1029-242X.
- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *Connections between non-linear optimization problems and associated variational inequalities*, Mathematics, Vol. 11, No. 6, 1314, 2023; DOI: 10.3390/math11061314; WOS: 000960275600001; eISSN: 2227-7390.
- K. Das, **S. Treanță**, M.B. Khan, *Set-valued fractional programming problems with sigma-arcwisely connectivity*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 6, 13181-13204, 2022; DOI: 10.3934/math.2023666; WOS: 000967571800001; ISSN: 2473-6988.
- **S. Treanță**, T. Saeed, *On Weak Variational Control Inequalities via Interval Analysis*, Mathematics, Vol. 11, No. 9, 2177, 2023; DOI: 10.3390/math11092177; WOS: 000987591300001; eISSN: 2227-7390.

Journal of Inequalities and Applications (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.021.

Optimal Control, Applications & Methods (Q2 – zona galbenă) are factorul de impact 1.955.

Research in the Mathematical Sciences (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 1.824.

AIMS Mathematics (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.739.

Mathematics (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.592.

Fractal and Fractional (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 3.577.

Chapman and Hall/CRC este o editură internațională de înaltă calitate științifică.

B. Articole acceptate

- **S. Treanță**, J.C. Yao, *Robust variational inequalities governed by curvilinear integral functionals*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 2023.

- **S. Treanță**, I. Ahmad, *Controlled nonlinear dynamics generated by isoperimetric constrained optimization problems involving second-order partial derivatives*, Systems and Control Letters, 2023.

Journal of Nonlinear and Variational Analysis (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.175.
Systems and Control Letters (Q1 – zona roșie) are factorul de impact 2.742.

C. Articole/capitole de carte trimise spre publicare

- **S. Treanță**, N. Abdulaleem, *On Variational Derivative and Controlled Variational Inequalities*, Editor: S.K. Mishra; Springer, 2023.

III. Detalierea rezultatelor

- T. Saeed, W. Afzal, K. Shabbir, **S. Treanță**, M. De la Sen, *Some Novel Estimates of Hermite-Hadamard and Jensen Type Inequalities for (h_1, h_2) -Convex Functions Pertaining to Total Order Relation*, Mathematics, Vol. 10, No. 24, 4777, 2022; DOI: 10.3390/math10244777; WOS: 000904438300001; eISSN: 2227-7390.

În studiul de față, am dezvoltat conceptul de funcții (h_1, h_2) -convexe referitoare la relația de ordine CR pentru IVFs. Acest nou concept ne permite să obținem rezultate mult mai precise decât alte relații de ordine parțială, deoarece diferența de interval dintre punctele finale este mult mai mică în exemplele bazate pe acest nou concept. În plus, sunt oferite câteva exemple netriviiale pentru a testa validitatea principalelor noastre constatări. Având în vedere utilizarea pe scară largă a operatorilor integrali în inginerie și alte științe aplicate, cum ar fi diferite tipuri de modelare matematică și faptul că diferiți operatori integrali sunt adecvați pentru diverse probleme practice, studiul nostru asupra inegalităților integrale de tip operator integral de interval le va extinde potențialul de aplicații în practică. Ar putea fi interesant să se determine inegalități echivalente pentru diferite tipuri de convexitate în viitor. Acest concept este de așteptat să fie util altor cercetători dintr-o varietate de domenii științifice.

- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *On some variational inequality constrained control problems*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2022, No. 1, 156, 2022; DOI: 10.1186/s13660-022-02895-w; WOS: 000898778100002; ISSN: 1029-242X.

În această lucrare, am studiat buna-definire și buna-definire generalizată pentru noile probleme de control variațional. Și anume, utilizând conceptele de semicontinuitate inferioară, pseudomonotonie, monotonie și hemicontinuitate asociate cu funcționale de tip integrală multiplă, în ipoteze adecvate, am stabilit că buna-definire este caracterizată în ceea ce privește existența și unicitatea soluțiilor. Mai mult decât atât, au fost furnizate condiții suficiente pentru buna-definire generalizată prin asumarea nevidității și a mărginirii setului de soluții de aproximare. A fost prezentată o aplicație concretă, care poate fi studiată numai cu instrumentele și rezultatele matematice dezvoltate în lucrarea de față. Ca dezvoltări ulterioare imediate ale acestei lucrări, menționăm următoarele două: (a) reformularea principalelor rezultate derivate în această lucrare prin utilizarea derivatei variaționale/funcționale a funcționalelor integrale; (b) studiul criteriilor de optimizare a punctului de tip φ asociate cu acest tip de probleme de optimizare constrânsă.

- **S. Treanță**, *Advances in Optimization and Nonlinear Analysis* (Editor); ISBN 978-3-0365-4749-7 (hardback); ISBN 978-3-0365-4750-3 (PDF); MDPI Switzerland, 2022.

Există multe aplicații de optimizare și analiză neliniară în diferite domenii ale științei de bază, ingineriei și fenomenelor naturale. În acest sens, am furnizat numărul special „Progrese în optimizare și analiză neliniară” pentru a acoperi noile progrese din aceste domenii matematice. În acest număr special, ne-am concentrat pe publicarea unor studii de cercetare privind optimizarea și analiza neliniară prin investigarea bunei-definiri și a soluțiilor optimale în noi clase de probleme variaționale (de control) (multiobiective) guvernate de costuri integrale curbilini sau multiple, și constrângeri mixte și/sau izoperimetrice care implică ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea. În plus, în acest număr special au fost luate în considerare unele aplicații ale calculului fracționar sau subiecte înrudite (inegalități variaționale, probleme de echilibru, probleme de punct fix, probleme evolutive, și așa mai departe). Ca răspuns la invitația noastră, am primit 41 de lucrări din 22 de țări (Egipt, Arabia Saudită, Maroc, Pakistan, Mexic, România, China, Iran, Tunisia, Africa de Sud, Yemen, Coreea, Turcia, Bangladesh, Australia, Indonezia, Thailanda, India, Ecuador, Albania, Spania, Malaezia), dintre care 15 au fost publicate și 26 respinse/retrase.

- T. Saeed, W. Afzal, M. Abbas, **S. Treanță**, M. De la Sen, *Some New Generalizations of Integral Inequalities for Harmonical cr -(h_1, h_2)-Godunova-Levin Functions and Applications*, Mathematics, Vol. 10, No. 23, 4540, 2022; DOI: 10.3390/math10234540; WOS: 000896895500001; eISSN: 2227-7390.

Analiza pe interval este renumită pentru capacitatea sa de a trata date incerte. Această metodă este utilă pentru abordarea modelelor cu date care conțin inexactități. Sunt utilizate diferite concepte pentru a gestiona incertitudinea datelor în analiza pe interval, inclusiv relația de pseudo-ordine, relația de includere și relația de ordine centru-rază (cr). Acest studiu își propune să stabilească o legătură între inegalități și relația de ordin (cr). În acest articol am dezvoltat inegalitățile de tip Hermite-Hadamard și Jensen folosind noțiunea de funcții armonice (h_1, h_2)-Godunova-Levin prin relația (cr) care este foarte nouă în literatură. Aceste noi definiții ne-au permis să identificăm multe cazuri speciale clasice și noi care ilustrează principalele noastre constatări. Este posibilă unificarea unui număr mare de funcții convexe binecunoscute folosind principiul acestui tip de convexitate. În plus, de dragul verificării validității principalelor noastre rezultate, sunt date câteva exemple netriviiale.

- Ritu, **S. Treanță**, D. Agarwal, G. Sachdev, *Robust Efficiency Conditions in Multiple-Objective Fractional Variational Control Problems*, Fractal and Fractional, Vol. 7, No. 1, 18, 2023; DOI: 10.3390/fractalfract7010018; WOS: 000915134100001; ISSN: 2504-3110.

Scopul acestui studiu este de a investiga problemele variaționale vectoriale multidimensionale luând în considerare incertitudinea datelor în fiecare dintre constrângerile și funcționale obiectiv. Stabilim condițiile robuste necesare și suficiente de eficiență, astfel încât orice soluție fezabilă robustă ar putea fi soluția robustă slab eficientă pentru problemele luate în considerare. În mod emfatic, prezentăm condiții robuste de

eficiență pentru probleme variaționale scalare, vectoriale și vectoriale fracționale multidimensionale, folosind noțiunea de funcțională convexă.

- **S. Treanță**, *Necessary and sufficient optimality conditions for some robust variational problems*, Optimal Control, Applications & Methods, Vol. 44, No. 1, pp. 81-90, 2022; DOI: 10.1002/oca.2931; WOS: 000829755700001; ISSN: 0143-2087; eISSN: 1099-1514.

În această lucrare, completăm studiul început într-o lucrare recentă despre problemele de control variațional scalare multidimensionale cu constrângeri mixte care implică ecuații/inecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Mai precis, în ipotezele de convexitate ale funcționalelor implicate (de tip integrală multiplă), stabilim condițiile de optimalitate necesare și suficiente pentru o clasă de probleme variaționale robuste cu incertitudine în funcționalele restricții și obiectiv.

- W. Afzal, K. Shabbir, T. Botmart, **S. Treanță**, *Some new estimates of well known inequalities for (h_1, h_2) -Godunova-Levin functions by means of center-radius order relation*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 2, 3101-3119, 2023; DOI: 10.3934/math.2023160; WOS: 000885968000006; ISSN: 2473-6988.

În acest articol ne propunem să stabilim o legătură între conceptul de inegalități și noua relație de ordine “Centru-Rază”. Funcția Godunova-Levin este introdusă prin referire la o relație de ordine totală între două intervale. În consecință, convexitatea și nonconvexitatea contribuie la diferite tipuri de inegalități. În ciuda acestui fapt, teoria convexă se îndreaptă către funcțiile Godunova-Levin, deoarece acestea sunt mai eficiente în determinarea termenilor de inegalitate decât alte clase de convexitate. Aplicarea acestor noi definiții a condus la multe cazuri speciale clasice și noi care ilustrează principalele constatări ale lucrării. Folosind relațiile de ordine totală între două intervale, acest studiu introduce funcțiile CR- $(h_1; h_2)$ -Godunova-Levin. Este clar din proprietățile lor și din utilizarea pe scară largă că relația de ordine “Centru-Rază” este un instrument ideal pentru studierea inegalităților. Această lucrare discută diverse inegalități bazate pe relația de ordine “Centru-Rază”. În plus, studiul include exemple pentru a-și susține concluziile.

- Preeti, P. Agarwal, **S. Treanță**, K. Nonlaopon, *Penalty approach for KT-pseudoinvex multidimensional variational control problems*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 3, 5687-5702, 2023; DOI: 10.3934/math.2023286; WOS: 000905180600002; ISSN: 2473-6988.

Lucrarea de față este rezultatul unui studiu contemplativ al problemei de control multi-timp (MCP) prin luarea în considerare a problemei de control auxiliare echivalente asociate $(MCP)_{\{\sigma\}}$ folosind abordarea penalizării exacte L_1 . Studii ulterioare relevă că setul de soluții al problemei luate în considerare și cel al problemei auxiliare prezintă o echivalență sub ipoteza KT-pseudoinvexității. În final, prezentăm o aplicație ilustrativă pentru autentificarea rezultatelor prezentate în această lucrare.

- **S. Treanță**, Y. Guo, *The study of certain optimization problems via variational inequalities*, Research in the Mathematical Sciences, Vol. 10, No. 1, 7, 2023; DOI: 10.1007/s40687-022-00372-w; WOS: 000919776900001; ISSN: 2522-0144.

În această lucrare, utilizând unele ipoteze de convexitate și diferențiabilitate generalizate ale funcționalelor implicate, stabilim mai multe conexiuni între soluțiile unor noi inegalități controlate vectoriale de tip variațional și soluțiile eficiente asociate cu anumite probleme variaționale controlate multi-obiectiv. De asemenea, noțiunea de mulțime invexă în raport cu unele funcții date are un rol important în demonstrarea principalelor rezultate derivate în lucrare. Aplicația ilustrativă, dată în finalul lucrării, oferă motivația fizică a problemei studiate.

- **S. Treanță**, *Results on the Existence of Solutions for Some Controlled Optimization Problems*, In: Debnath P., Srivastava H.M., Chakraborty K., Kumam P. (eds) *Advances in Number Theory and Applied Analysis*, pp. 327-342; DOI: 10.1142/9789811272608_0014; ISBN: 978-981-127-259-2; Chapman and Hall/CRC, 2023.

În acest capitol, prin folosirea unor ipoteze de diferențiabilitate și convexitate generalizată ale funcționalelor implicate, stabilim anumite legături între soluțiile unor inegalități variaționale controlate și soluțiile (proprii, slabe) eficiente asociate cu anumite probleme variaționale controlate multiobiectiv. Notiunea de multime invexa fata de unele functii date are un rol important in demonstrarea principalelor rezultate derivate in capitol.

- **S. Treanță**, *Variational Problems and Applications*, Mathematics, Vol. 11, No. 1, 205, 2023; DOI: 10.3390/math11010205; WOS: 000911040400001; eISSN: 2227-7390.

De-a lungul timpului, mulți cercetători au fost interesați în obținerea de proceduri de soluție în analiza variațională (interval/fuzzy) și control robust. Pentru a formula condiții necesare și suficiente de optimalitate/eficiență și teoreme de dualitate pentru diferite clase de probleme variaționale robuste și cu valori pe interval/fuzzy, au fost propuse diverse abordări. În acest sens, am furnizat numărul special „Probleme și aplicații variaționale” pentru a acoperi noile progrese în aceste subiecte matematice. În acest număr special, ne-am concentrat pe formularea și demonstrarea unor rezultate de caracterizare a unor soluții bine-definite și robust eficiente în noi clase de probleme variaționale (multiobiectiv) (de control) guvernate de funcționale de cost integrale curbilini sau multiple, și constrângeri mixte și/sau izoperimetrice care implică ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea. Ca răspuns la invitația noastră, am primit 30 de lucrări din multe țări (România, China, India, Arabia Saudită, Australia, Egipt, Yemen, Germania, Pakistan, Thailanda, Rusia), dintre care 14 au fost publicate și 16 au fost respinse/retrase.

- **S. Treanță**, T. Saeed, *Duality Results for a Class of Constrained Robust Nonlinear Optimization Problems*, Mathematics, Vol. 11, No. 1, 192, 2023; DOI: 10.3390/math11010192; WOS: 000910150300001; eISSN: 2227-7390.

În această lucrare, investigăm diferite rezultate ale dualității pentru o nouă clasă de probleme de optimizare neliniară. Pentru această nouă clasă de probleme, care implică funcționale de tip integrală curbilinie (independentă de drum) și constrângeri mixte guvernate de derivate parțiale de ordinul doi și date incerte, formulăm și studiem probleme duale de optimizare de tip Wolfe, Mond-Weir, și mixt. În acest sens, luând în considerare conceptul de convexitate, determinat de lagrangieni controlați de ordinul doi incluzând date

incerte, și noțiunea de soluție eficientă slabă robustă asociată cu problema considerată, creăm un nou context matematic pentru afirmarea și demonstrarea teoremelor de dualitate. De asemenea, este prezentată o aplicație ilustrativă.

- S.K. Sahoo, H. Alrweili, **S. Treanță**, Z.A. Khan, *New Fractional Integral Inequalities pertaining to Center-Radius (cr)-Ordered Convex Functions*, *Fractal and Fractional*, Vol. 7, No. 1, 81, 2023; DOI: 10.3390/fractalfract7010081; WOS: 000919932800001; ISSN: 2504-3110.

În această lucrare, folosim ideea de funcții convexe cu valori pe interval ale ordinii de tip Centru-Rază (cr) pentru a oferi versiuni fracționale ale inegalității Hermite-Hadamard. Rezultatele sunt susținute de unele estimări numerice și reprezentări grafice având în vedere câteva exemple potrivite. Rezultatele sunt total noi în contextul funcțiilor cr-convexe cu valoare pe interval.

- K. Das, **S. Treanță**, T. Botmart, *Set-Valued Minimax Programming Problems under σ -Arcwisely Connectivity*, *AIMS Mathematics*, Vol. 8, No. 5, 11238-11258, 2023; DOI: 10.3934/math.2023569; WOS: 000949757600001; ISSN: 2473-6988.

O problemă de programare minimax cu valori pe mulțimi este luată în considerare în acest studiu. Prezentăm ideea conectivității “ σ -arcwisely” a aplicațiilor cu valori pe mulțimi (pe scurt, SVM) în sensul mai larg al SVM-urilor conectate arcwisely. Criteriile suficiente pentru optimalitatea Karush-Kuhn-Tucker sunt constituite pentru problema data sub ipotezele de epidiferențiere contingentă și de conectivitate “ σ -arcwisely”. În plus, dezvoltăm modelele de dualitate Mond-Weir, Wolfe și de tip mixt și verificăm teoremele asociate ale dualității puternice, slabe și inverse între problemele primale și asociate ale dualității sub presupunerea conectivității “ σ -arcwisely”.

- **S. Treanță**, *Variational Problems and Applications* (Editor); ISBN 978-3-0365-6589-7 (hardback); ISBN 978-3-0365-6588-0 (PDF); MDPI Switzerland, 2023.

De-a lungul timpului, mulți cercetători au fost interesați în obținerea de proceduri de soluție în analiza variațională (interval/fuzzy) și control robust. Pentru a formula condiții necesare și suficiente de optimalitate/eficiență și teoreme de dualitate pentru diferite clase de probleme variaționale robuste și cu valori pe interval/fuzzy, au fost propuse diverse abordări. În acest sens, am furnizat numărul special „Probleme și aplicații variaționale” pentru a acoperi noile progrese în aceste subiecte matematice. În acest număr special, ne-am concentrat pe formularea și demonstrarea unor rezultate de caracterizare a unor soluții bine-definite și robust eficiente în noi clase de probleme variaționale (multiobiectiv) (de control) guvernate de funcționale de cost integrale curbilinii sau multiple, și constrângeri mixte și/sau izoperimetrice care implică ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi și al doilea. Ca răspuns la invitația noastră, am primit 30 de lucrări din multe țări (România, China, India, Arabia Saudită, Australia, Egipt, Yemen, Germania, Pakistan, Thailanda, Rusia), dintre care 14 au fost publicate și 16 au fost respinse/retrase.

- F. Jarad, S.K. Sahoo, K.S. Nisar, **S. Treanță**, H. Emadifar, T. Botmart, *New stochastic fractional integral and related inequalities of Jensen-Mercer and Hermite-Hadamard-Mercer type for convex stochastic processes*, Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2023, No. 1, 51, 2023; DOI: 10.1186/s13660-023-02944-y; WOS: 000964904300001; ISSN: 1029-242X.

În această investigație, desfășurăm inegalitatea Jensen–Mercer (J – M) pentru procesele stocastice convexe printr-un nou operator integral fracțional. Încorporarea proceselor stocastice convexe, a inegalității (J – M) și a unui operator integral fracționar având un nucleu exponențial aduce o nouă direcție teoriei inegalităților. Având în vedere acest lucru, sunt prezentate estimări ale inegalităților fracționale de tip Hermite–Hadamard–Mercer (H – H – M) care implică procese stocastice convexe. În contextul noului operator integral fracționar, investigăm, de asemenea, o identitate nouă pentru aplicațiile diferențiabile. Apoi, o nouă inegalitate de tip (H – H – M) este prezentată folosind această identitate ca rezultat auxiliar.

- **S. Treanță**, T. Antczak, T. Saeed, *Connections between non-linear optimization problems and associated variational inequalities*, Mathematics, Vol. 11, No. 6, 1314, 2023; DOI: 10.3390/math11061314; WOS: 000960275600001; eISSN: 2227-7390.

În această lucrare, utilizând invexitatea (sau pseudoinvexitatea) și diferențiabilitatea Frechet a unor funcționale integrale de tip curbiliniu, enunțăm câteva relații între soluțiile unei noi probleme de optimizare neliniară și inegalitatea variațională asociată. Pentru a demonstra rezultatele obținute în această lucrare, folosim noua noțiune de mulțime invexă luând în considerare unele funcții date. Pentru a justifica eficacitatea și aplicabilitatea remarcabilă a acestei lucrări, sunt oferite câteva exemple ilustrative.

- K. Das, **S. Treanță**, M.B. Khan, *Set-valued fractional programming problems with sigma-arcwisely connectivity*, AIMS Mathematics, Vol. 8, No. 6, 13181-13204, 2022; DOI: 10.3934/math.2023666; WOS: 000967571800001; ISSN: 2473-6988.

În această lucrare, determinăm condițiile Karush-Kuhn-Tucker suficiente de optimalitate ale unei probleme de programare fracțională cu valori pe mulțimi (pe scurt, SVFP) sub presupunerile de epidiferențiabilitate contingentă și conectivitate “\sigma-arcwisely”. De asemenea, explorăm rezultatele dualității parametrice, Mond-Weir, Wolfe și de tip mixt pentru problema luată în considerare.

- **S. Treanță**, T. Saeed, *On Weak Variational Control Inequalities via Interval Analysis*, Mathematics, Vol. 11, No. 9, 2177, 2023; DOI: 10.3390/math11092177; WOS: 000987591300001; eISSN: 2227-7390.

Această lucrare tratează conexiunile dintre problema de control optimal evaluată pe interval și inegalitatea de control variațional slab asociată. Mai precis, luând în considerare proprietățile de LU-convexitate și de independență a traiectoriei ale funcționalelor integrale curbilinii implicate, stabilim un rezultat privind existența soluțiilor LU-optimale pentru problema de control optimal în studiu, și un rezultat privind existența soluțiilor pentru inegalitatea de control variațional slab asociată.

IV. Concluzii

- potrivit planului de lucru, ce descrie sarcinile specifice științifice și neștiințifice legate de obiectivele proiectului, suntem în conformitate;
- lucrările trimise spre publicare (sau în lucru) continuă să trateze subiecte menționate ca și obiective specifice ale proiectului de cercetare.

26.06.2023

Savin Treanta

Silviu-Aurelian Urziceanu